Эмиль Борель

Вероятность и достоверность

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

ВЕРОЯТНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ

Перевод
со второго французского издания
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией и с предисловием
Б. В. ГНЕДЕНКО

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

« QUE SAIS-JE ? »
LE POINT DES CONNAISSANCES ACTUELLES

PROBABILITÉ ET CERTITUDE

par

Émile BOREL
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes
Directeur honoraire de l'École Normale Supérieure

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1956

QUATORZIÈME MILLE

2-2-2
160-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Выдающийся французский математик Э. Борель (1871—1956) был исключительно разносторонен и продуктивен. Он оставил после себя огромное научное наследие, состоящее из многочисленных оригинальных работ, монографий и учебников, относящихся к различным областям математики и ее применениям к физике и другим разделам естествознания. Ему принадлежат также работы по философским вопросам математики и большое число популярных статей и книг.

Для его книг характерна острота постановок важных задач, неожиданность сопоставлений, стремление увязать результаты теоретической математики с задачами практики, понимаемой достаточно широко. В них всегда много интересных мыслей и неожиданных подходов к изучению важнейших вопросов науки, хотя и не со всеми его методологическими установками может согласиться читатель. Однако не философские воззрения составляют ядро и основную ценность его произведений. Стремление понять сущность явлений и использовать для этой цели математический аппарат, а порой и развить новые идеи, разбудить мысль читателя и донести до него проблемы современной науки в увлекательной и доступной форме,— вот что в первую очередь свойственно статьям и книгам Э. Бореля.

Давно переведенная на русский язык книга Бореля «Случай» (ГИЗ, 1923) была хорошо принята советским читателем. Она не мало содействовала развитию и пробуждению интересов к теории вероятностей у нашей молодежи. Эта книга была написана Борелем давно, когда он только еще начал заниматься вопросами теории вероятностей. Предлагаемая в настоящем переводе книга «Вероятность и достоверность» написана в последние годы его жизни. Русское издание этой книги оправдано уже одним желанием проследить эволюцию взглядов выдающегося ученого и популяризатора. Однако этим не исчерпывается то, что сумеет извлечь советский читатель из этой книжки: в ней охвачен почти весь спектр применений теории вероятностей в современном естествознании. Конечно, автор при этом сохраняет популярность изложения.

На мой взгляд, книга много выиграла бы при использовании минимального математического аппарата, так как то, что не до конца становится ясным после длительных словесных рассуждений, исчерпывающе освещается одной строчкой формул. До некоторой степени это осуществлено в примечаниях редактора [1]), в полной же мере осуществление этого замысла означало бы изменение характера книжки и даже, пожалуй, необходимость написания новой.

Перевод сделан со второго французского издания, вышедшего в 1956 г. Переводчик стремился не только возможно точнее перевести текст, но и передать оттенки мысли автора.

В заключение я считаю необходимым добавить несколько слов относительно научного вклада Э. Бореля в современную теорию вероятностей. В некоторой степени именно ему следует приписать инициативу пересмотра основ этой науки с позиции теории меры и теории функций действительного переменного. Как известно, именно на этом пути А. Н. Колмогоров разработал аксиоматику теории вероятностей и теоретико-множественную интерпретацию всех основных ее понятий, принесших с собой предпосылки ее исключительного прогресса. С именем Бореля связаны первая формулировка усиленного закона больших чисел и теоретиковероятностные постановки задач теории чисел. Но, быть может, не столько конкретные теоремы, найденные и доказанные Борелем, представляют особое значение для теории вероятностей, сколько стимулирование им новых подходов и выдвижение им новых продуктивных идей.

Б. В. Гнеденко

---

[1]) Примечания редактора, отмеченные квадратными скобками, помещены в конце книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Прошло около сорока лет с тех пор, как напечатана моя первая работа о вероятностях, после чего я написал еще несколько других и не решаюсь заявить, что настоящая работа является последней. Все же она отмечает существенный этап в эволюции моих взглядов.

В самом деле, до сих пор в моих писаниях, особенно в книге «Случай» [1]), я пользовался общеупотребительными у физиков выражениями, когда речь шла о физических явлениях, вероятность которых крайне мала. В таких случаях ограничиваются утверждением, что в высшей степени невероятно осуществление таких явлений, но спешат добавить, что это не достоверно.

Мне представляется, в итоге размышлений, что такой подход не реалистичен, что он не учитывает совокупности наших сведений о вселенной, и я пришел к выводу, что не следует бояться применить слово достоверность для обозначения вероятности, которая отличается от единицы на достаточно малую величину. Я тем лучше могу себе представить те возражения, какие можно выдвинуть против такого изменения терминологии, что в свое время я их сам выдвигал перед собою и они меня убедили. Поэтому мне казалось не лишним посвятить эту небольшую книжку углубленному рассмотрению вопроса.

Те читатели, которые проследят за ходом рассуждений, заметят, я полагаю, что дело здесь в вопросе не чисто формальном и, стало быть, не праздном. Такое изменение терминологии соответствует лучшему пониманию универсальной роли вероятности в научном познании, и оно может позволить рассмотреть с иной точки зрения космологические и биологические проблемы, интересующие не только философов, но и всех людей, чье любопытство не ограничивается

---

[1]) В русском переводе: Э. Борель, Случай, ГИЗ, М.— П., 1923. (*Ред.*)

повседневной жизнью. Но не могло быть и речи об изучении здесь всех этих проблем; я ограничился лишь кратким указанием на них в конце работы.

Попутно мне довелось уточнить, в каких случаях можно практически пренебречь вероятностями, вообще не пренебрежимыми. Некоторые из таких замечаний относятся к азартным играм, которыми занимались при зарождении науки о вероятностях и которые остаются для вероятностников особенно интересным предметом изучения благодаря той точности, с какой вычисляются относящиеся к ним вероятности.

В итоге можно сказать, что в этой маленькой книге показаны те этапы, через которые проходит понятие вероятности,— сначала противопоставляемое понятию достоверности, затем сливающееся с тем, что можно назвать достоверностью практической, а потом — с достоверностью, которую можно было бы характеризовать как абсолютную, если бы понадобилось уточнить ее значение.

[1950 *г.*]

Глава I

ВЕРОЯТНОЕ И ДОСТОВЕРНОЕ

1. Повседневная речь. Мы все пользуемся словами «вероятный» и «достоверный» и, по-видимому, как правило, нет расхождений относительно их значения. Однако небесполезно уточнить это значение в той мере, насколько это возможно.

Среди тех событий, которые мы характеризуем как маловероятные, или как достаточно вероятные, или как очень вероятные, можно различать три категории: те, которые относятся к нашему собственному поведению; те, которые относятся к поведению других людей, и те, которые относятся к явлениям природы. Впрочем, мы увидим, что границы между этими тремя категориями иной раз неопределенны.

«Весьма вероятно, что я выйду завтра утром»; когда я высказываю это замечание, то я в общей форме резюмирую ряд более или менее сложных размышлений, из которых одни относятся к поведению различных лиц, а другие — к явлениям природы. Например, я решил выйти, если только тот друг, который предупредил меня о своем возможном посещении, не придет, чтобы повидаться со мной; или я решил выйти, если только не пойдет снег,— в случае, когда имеем декабрь,— или же, если не разразится сильная гроза, при условии, что мы имеем июль. Как в одном, так и в другом случае вероятность моего выхода зависит от той вероятности, которую я приписываю поступку другого лица или же тому или иному метеорологическому явлению. В следующих параграфах мы обсудим, как и при каких условиях эти различные вероятности могут быть выражены численно. Однако надо учитывать помимо этого другую вероятность, которой хорошо себя чувствующие люди склонны пренебрегать, когда они намечают какие-либо краткосрочные планы: я не смогу выйти, если я тяжело заболею и, вполне очевидно, если я умру. Эти две гипотезы должны всегда подразумеваться, когда речь идет о вероятностях, относящихся к живому существу.

С указанными оговорками можно считать, что *если верят в мою искренность*[1]), то оттенкам, с которыми я буду говорить о вероятности моего завтрашнего выхода, будет придано известное значение: я могу охарактеризовать этот выход как маловероятный, достаточно вероятный, вероятный, очень вероятный, крайне вероятный. Было бы интересно исследовать, каковы численные значения вероятности, которые, для определенного лица, соответствуют этим различным оттенкам.

Понятию вероятного противостоит понятие достоверного. С большой осторожностью следует утверждать, что я безусловно выполню такой-то поступок, даже в самом близком будущем, так как мне могут помешать различные обстоятельства, не зависящие от моей воли, не говоря уже о состоянии моего здоровья или о моей смерти. Но если речь идет о факте отрицательного порядка, например, что я «заведомо не буду присутствовать завтра на такой-то церемонии», то такое утверждение будет принято как практически точное теми, кто мне доверяет и кто знает, что мой характер не переменчив.

Так же обстоит дело с различными утверждениями относительно поведения других человеческих существ, особенно если речь идет об общем поведении значительного числа людей. Например, если завтра в некоей большой стране состоятся общие выборы, то все лица, которые несколько в курсе политического положения, сойдутся на мнении о достоверности того, что такая-то партия получит по меньшей мере 30 мест, а другая партия не менее 200 мест. Такие достоверности не могут не подтвердиться, если только не произойдет какой-нибудь катаклизм в природе, что помешает выборам, или катаклизм социальный, вроде государственного переворота, что глубочайшим образом изменит условия голосования или доброкачественность результатов.

Подобно этому, если я утверждаю, что в наших широтах является достоверным восход Солнца завтра, то никто не будет этого оспаривать. Однако нужно уточнить смысл этого утверждения. Если я под этим понимаю, что я безусловно увижу, как встает Солнце, то я пренебрегаю тем случаем, что меня может не быть уже в живых. Если я понимаю под

---

[1]) Здесь и далее курсив автора. (*Ред.*)

этим, что во Франции будут люди, которые увидят восход Солнца [1]), то я не ошибусь, если только космическая катастрофа не уничтожит значительную часть земного шара или даже весь земной шар целиком.

Имеются другие случаи, когда утверждение относится к событию, которое должно произойти через несколько мгновений; его достоверность ограничена только той оговоркой, что ему не помешает немедленная катастрофа. Например, я подбрасываю камень на один метр над землей и утверждаю, что он достигнет земли в течение доли секунды; я рискую ошибиться, если я нахожусь в лавке, расположенной в цокольном этаже, и если грузовик туда ворвется в то мгновение, когда я швырнул камень.

Таковы первые размышления, на которые нас наводит обычное использование слов повседневной речи: вероятный и достоверный. Теперь мы попытаемся численно уточнить эти качественные указания; известно, что знание людей заслуживает имени Науки в зависимости от того, какую роль играет в нем число.

2. Оценка вероятности. Когда я в обществе двух друзей, знающих мои обычные выражения, говорю, что мало вероятно, или вероятно, или очень вероятно, что я завтра выйду, эти два друга могут, в зависимости от их характера, в зависимости от того, какую погоду они предвидят (в том случае, когда они считают, что я выйду при хорошей погоде), истолковать мое утверждение достаточно различным образом; один из них будет считать более вероятным, что я выйду [2]), а другой будет считать более вероятным, что я не выйду. Стало быть, если они имеют склонность к игре, они могут побиться об заклад, и каждый из них обяжется уплатить известную сумму другому, если тот окажется прав, причем один из них будет утверждать, что я выйду, а другой — что я не выйду.

Иной раз говорят с явным преувеличением, что из двух бьющихся об заклад один дурак, а другой жулик. При этом подразумевается, что один из двух лучше осведомлен, чем другой, и почти твердо знает, состоится ли то, относительно чего заключено пари, или не состоится. В действительности

[1]) Разумеется, могут быть облака, которые помешают увидеть Солнце, но дневной свет будет виден.

[2]) Мы пользуемся здесь сокращенным оборотом речи; это означает: более вероятно, что я выйду, чем то, что я не выйду.

часто бывает, что каждый из бьющихся об заклад имеет основание полагать, что именно он лучше осведомлен, и потому каждый из них считает заключение пари выгодным, но это не должно означать, что он заслуживает того, чтобы его рассматривали как жулика, если он прав, или как дурака, если он ошибается.

Приведенный нами пример выявляет субъективный характер вероятности. Когда я говорю, что я, вероятно, завтра выйду, я приписываю, сознательно или бессознательно, известную вероятность p событию, которое можно обозначить A: я выйду завтра. Но мой друг Павел, слушая меня и учитывая те сведения, которыми он может обладать (например, в метеорологии), может приписать событию A вероятность p', отличную от p, а мой друг Петр припишет A вероятность p'', отличную от p и от p'. Из того пари, которое заключают Павел и Петр, можно сделать вывод, что p' больше чем $\frac{1}{2}$ и что p'' меньше чем $\frac{1}{2}$. Было бы трудно извлечь аналогичное указание относительно p, пользуясь тем же самым методом пари, так как, если я ставлю значительную сумму, заключая пари на то, выйду я или нет, то само пари может повлиять на мое решение и, следовательно, изменить вероятность p. Так же могло бы обстоять дело, если бы пари заключались относительно результатов выборов, когда избирателей сравнительно мало и они не лишены чувствительности к соблазнам наживы. В другом месте я указываю, впрочем, как, используя метод пари, можно получить приближенные оценки достаточно сложных вероятностей [1]).

3. Общее определение субъективных вероятностей. Когда человек ставит себе задачу оценить вероятность события A, он учитывает, с одной стороны, природу события A, а с другой стороны,— все, что он знает относительно различных возможностей, которые могут благоприятствовать или не благоприятствовать осуществлению A. Мы можем вместе с Кейнсом [2]) обозначить через K совокупность тех сведений, которые учитываются при оценке вероятности.

Таким образом, эта вероятность может быть обозначена через $P(A, K)$, что означает вероятность события A при

---

[1]) См. É. B o r e l, Les probabilités et la vie (Вероятности и жизнь), § 19 и 20 (изд. Presses Universitaires de France, Paris, 1946).

[2]) J. M. K e y n e s, английский экономист (1883—1946). (*Ред.*)

наличии совокупности сведений K, которая непременно заключена в некотором человеческом мозгу. Если два человека обладают по отношению к событию A в точности одинаковой совокупностью сведений K, то значения вероятностей для этих двух людей будут одни и те же. Однако может случиться, что для одного и того же человека совокупность сведений K с течением времени видоизменяется и станет K'; вероятность также изменится, и ее надо будет записать как $P(A, K')$.

Это обозначение Кейнса несколько усложнено, но оно имеет преимущество постоянно напоминать нам о том, что вероятность не существует отвлеченно, а только по отношению к определенному человеческому мозгу, то есть относительно некоторой совокупности сведений K. Впрочем, может случиться, что в эту совокупность сведений входят некоторые вероятности, относящиеся к событиям, от которых может зависеть A. Такие вероятности сами должны быть оценены с учетом некоторой совокупности сведений, которая может со временем меняться.

Например, в том случае, когда один из моих друзей задается вопросом, выйду ли я завтра, и знает, что мое решение зависит отчасти от погоды, совокупность сведений K содержит, в частности, те вероятности, которые мой друг приписывает различным возможным завтра состояниям погоды; эта совокупность K может измениться, если он узнает новую метеосводку или если он сам понаблюдает за направлением и силой ветра и т. п. Этот простой пример показывает, насколько сложны те задачи, которые можно поставить в связи с определением вероятности $P(A, K)$, вероятности, которая в частном случае может быть равна единице, то есть быть равносильной достоверности. В действительности все научные и человеческие проблемы могут быть поставлены в таком виде; теоретиков же почти исключительно занимали такие задачи, в которых значение $P(A, K)$ легко определить [1].

4. Некоторые более сложные проблемы. Имеется, однако, категория более сложных задач, о которых следует сказать несколько слов. Это те задачи, для которых совокупность сведений K содержит несколько случайных элементов, то есть элементов, в свою очередь зависящих от вероятности. Чтобы дать простой пример, возьмем колоду из 52 карт и, разложив ее на столе, выберем наугад 32 карты. Эти 32 карты составят колоду $\mathcal{J}$, весьма отличную от обычной колоды в 32 карты, но мы все же можем пользоваться этой колодой $\mathcal{J}$, точный состав которой мы не знаем, и поставить относительно нее различные вероятностные задачи. Например, мы вытягиваем из $\mathcal{J}$ наугад одну карту, замечаем ее, снова помещаем в колоду, которую тасуем, и вытаскиваем наугад вторую карту. Мы можем это повторять большое число раз и поставить вопрос, какова вероятность того, что в тысяче выборок будет такое-то число бубновых, червовых, пиковых или трефовых карт. Ясно, что ответ на такой вопрос зависит от состава $\mathcal{J}$, которого мы не знаем, но о котором нам известно, что 32 карты этой колоды получены случайной выборкой из 52 карт, содержащих 13 бубновых, 13 червовых, 13 пиковых и 13 трефовых карт. Такова наша совокупность сведений K.

Итак, ответ на поставленный вопрос не может быть простым, но в принципе тут должны будут появиться вероятностные коэффициенты. Хотя этот вопрос достаточно частного характера, ответ на него может быть интересен, несмотря на свою относительную неточность.

Например, можно утверждать, что крайне вероятно при 1000 последовательных выборок по одной карте из $\mathcal{J}$ получить больше чем четыре бубны; чтобы дело обстояло иначе, необходимо, чтобы $\mathcal{J}$ не имела ни одной бубны, а это крайне мало вероятно

5. Случай неполных сведений. Надо также упомянуть о том случае, когда наличные сведения неполны и недостаточны, так что значение вероятности является весьма неопределенным. Это то, что имеет место в действительности при долгосрочных прогнозах погоды, поскольку наши сведения в метеорологии не позволяют делать надежные предсказания. Однако статистика, использующая наблюдения за много лет, позволяет, зная только дату, указать с известной точностью вероятности для различных возможностей. Например, известны температуры, которые отмечались в течение долгого периода в Париже, или, точнее, на метеорологической станции определенного парижского района. Если принять гипотезу постоянства климата, отсюда можно вывести вероятности того, что средняя (или максимальная, или минимальная) температура в Париже в ближайшее 1 января будет ниже — 10°, будет между — 10 и —5°, будет между

—5 и 0° между 0 и 5°, между 5 и 10°, выше 10°. Само собой разумеется, что когда подойдут последние дни декабря, сведения, которые будут даны различными метеостанциями, позволят улучшить нашу оценку этих вероятностей.

6. Случай, когда имеются ошибочные сведения. Наконец, надо сказать о случае значительно более важном, даже если его считать достаточно редким. Это тот случай, когда совокупность сведений K, входящая в $P(A, K)$, содержит погрешности. Вероятность A тогда, очевидно, также ошибочна, и это является особенно тягостным, если ошибочная вероятность оказывается равной единице, то есть совпадает с достоверностью.

Перед нами не что иное, как общая проблема истинности и ошибочности, о которой много рассуждали философы. Не нашей задачей является изложение здесь философской стороны проблемы (см. главу 9); мы ограничимся практической точкой зрения: единственное рекомендуемое каждому решение — это сделать все возможное, чтобы не обмануться и не быть обманутым.

Если, например, я беру колоду из 52 карт вместо колоды из 32 карт, то предсказания, которые я могу сделать относительно характера наудачу извлеченных из этой колоды карт, будут, очевидно, ложными [2]. При колоде в 32 карты я могу утверждать с достаточно малыми шансами ошибиться, что при извлечении 80 карт я вытяну более 20 фигур; а при колоде в 52 карты такая выборка далеко не является невозможной, но она также далеко не очень вероятна.

Моя ошибка будет еще большей, если я имею дело с ловким фокусником, который, взяв у меня из рук мою колоду в 32 карты, сумеет выбросить на стол другую, припрятанную им колоду, в которой все 32 карты были бы одинаковы, например, только червовые короли или только семерки пик. Тогда ясно, что фокусник может предложить мне пари, которое я проиграю, если он убедит меня самому выбрать наудачу карту из фальшивой колоды, состав которой известен ему одному.

Итак, следует еще и еще раз подчеркнуть то, что все заключения, которые могут быть сделаны при исчислении вероятностей, всегда должны подчиняться подразумевающемуся ограничению: надо допустить, что условия опыта или опытов не изменились то ли в силу мошенничества, то ли неожиданным и неизвестным нам образом.

Сравнительно благоприятным случаем является тот, когда случайное обстоятельство только исключает эксперимент, например, облако мешает астроному наблюдать затмение или прохождение звезды через меридиан. Испытание тогда попросту отменяется, все происходит так, как если бы астроном оставался дома, а не наблюдал. Но если плохой шутник помещает перед объективом очень тонкую призму, которая вызывает легкое отклонение световых лучей, мы имеем гораздо более серьезный случай, так как результат наблюдения может быть испорчен ошибкой, причина которой останется неизвестной; если эта ошибка очень мала, то можно будет построить сложные теории, чтобы объяснить ее причину.

Таким образом, весьма важно провести различие между неполной совокупностью сведений K и совокупностью K, которая частично ошибочна. В теории вероятности неполноту сведений надо считать нормальным явлением; можно даже утверждать, что если бы были известны все обстоятельства изучаемого явления, то для вероятности не было бы места, а наше знание было бы достоверным. Такая точка зрения является, однако, теоретической, так как не видно, как можно точно знать все движения руки, бросающей кости или тасующей карты [3].

Только в том случае, когда это ловкая рука фокусника, который может подчинить своей воле движение кости и порядок, в котором ложатся карты (быть может, впрочем, после того, как он подменил кость или пометил карты), надо отказаться от применения исчисления вероятностей, так как перестает быть верной неявно принятая гипотеза, что шесть граней кости имеют одинаковые шансы выпасть и что все карты имеют одинаковые шансы занять определенное место в колоде.

Глава II

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

7. **Азартные игры.** В предыдущей главе мы уже рассмотрели несколько примеров, заимствованных из азартных игр. В этом нет порочного круга [1]), по крайней мере с точки зрения того, кому эти игры известны, но не известны математические теории, так как изобретение азартных игр предшествовало математическому исследованию вероятностей, хотя изобретатели этих игр, несомненно, интуитивно достаточно ясно представляли себе, что такое вероятность.

Если говорить о костях, картах или домино, то есть о наиболее распространенных азартных играх, которые являются также и наиболее старыми [2]), то они основаны на равенстве некоторых вероятностей. Различные грани кости имеют одинаковую вероятность появиться при бросании кости на горизонтальном столе; различные карты колоды имеют одинаковые шансы попасть к любому из игроков, когда колода хорошо перетасована (дополнительной предосторожностью является «срезание» колоды перед раздачей; эта предосторожность становится мнимой, если сдающий умеет «передернуть»).

Таким образом, ученые, создавшие исчисление вероятностей (Галилей, Ферма, Паскаль), нашли как раз в игре в кости простой и хорошо подготовленный материал, который значительно облегчил их первые шаги. Они допустили, что правильно изготовленная кость является идеальным кубом, сделанным из однородного материала; равным образом они приняли, что те пометки, с помощью которых различают

---

[1]) Борель указывает здесь на то, что воспользоваться азартными играми для определения или уточнения понятий теории вероятностей, а затем использовать эти понятия для исследования таких игр, не составляет порочного круга. (*Ред.*)

[2]) Следует упомянуть и об игре в орла и решку — самой простой из всех игр.

шесть граней, то есть которым соответствуют первые шесть целых чисел, настолько ничтожны, что не нарушают серьезным образом симметрию куба.

Первая трудность, которую преодолел Паскаль в своей переписке с шевалье де Мере, связана с точным подсчетом случаев. Речь шла об игре, при которой бросают три кости, и один из игроков заключает пари, что сумма на выброшенных гранях будет больше чем 10, а другой — что она будет равна или меньше 10. Легко видеть, что шансы обоих игроков равны. Но трудность была в следующем. Терпеливый учет очень большого числа партий показал шевалье де Мере, что тот, кто ставит на сумму, большую 10, чаще выигрывает с 11, чем с 12 очками. Однако, возражал Мере, 11 очков можно получить шестью различными способами (6—4—1; 6—3—2; 5—5—1; 5—4—2; 5—3—3; 4—4—3), и 12 очков тоже можно получить шестью способами (6—5—1; 6—4—2; 6—3—3; 5—5—2; 5—4—3; 4—4—4). Ответ Паскаля очень прост: сочетание 6—4—1 не является простым, а шестикратным, так как, если пронумеровать кости или если каждую из трех костей окрасить по разному, чтобы можно было их различать, значение 6 может быть получено на каждой из трех костей, а значение 4—на каждой из двух остающихся, что уже составляет шесть комбинаций. Напротив, такое сочетание, как 5—5—1, может быть получено только тремя различными способами, а сочетание 4—4—4 — единственным способом.

Следовательно, если желательно узнать действительное число различных способов получить 11 или получить 12 очков, то надо для каждого из этих случаев составлять сумму тех шести чисел, которые соответствуют сочетаниям, указанным выше в скобках.

Таким образом, для случая 11 очков мы получаем, взяв эти сочетания в том порядке, в каком мы их написали,

$$6+6+3+6+3+3=27,$$

тогда как для случая 12 очков мы имеем

$$6+6+3+3+6+1=25.$$

Отсюда заключаем, что в среднем мы получаем 11 очков 27 раз, тогда как 12 очков мы получаем только 25 раз, и этот результат отлично сошелся с наблюдениями шевалье де Мере.

8. Повторные испытания. Замечание, сделанное Паскалем по поводу игры в три кости, полностью применимо в том случае, когда кости выбрасываются последовательно, одна за другой, если учитывать общий результат трех бросаний. В этом случае можно пользоваться только одной костью, и мы получим 6—5—1 шестью различными способами, потому что шестерка может быть получена либо при первом, либо при втором, либо при третьем бросании, а когда это бросание уже проделано, остаются еще две возможности, чтобы получить 5 перед 1 или 1 перед 5.

Если мы рассмотрим самую простую игру, игру в орла и решку, то ясно, что если Петр и Павел договорились сыграть партию из четырех последовательных бросаний, то общий результат будет допускать пять различных возможностей, так как Петр может выиграть 4, 3, 2, 1 или 0 раз, тогда как Павел соответственно выигрывает 0, 1, 2, 3 или 4 раза. Но в действительности каждую из этих возможностей надо отличать от остальных, потому что они не эквивалентны. Для Петра есть только один способ выиграть 4 раза, потому что он должен выиграть при первом, втором, третьем и четвертом бросании, но есть 4 способа выиграть 3 раза, так как можно проиграть или в первый, или во второй, или в третий, или в четвертый раз. Легко видеть, что для выигрыша два раза (а следовательно, для проигрыша два раза) есть шесть различных возможностей, так как выигрыши могут иметь отметки 1 и 2, или 1 и 3, или 1 и 4, или 2 и 3, или 2 и 4, или 3 и 4.

Кроме того, имеется симметрия между Петром и Павлом и, если один выигрывает три раза, другой выигрывает один раз. Отсюда заключаем, что относительные возможности для Петра выиграть 4, 3, 2, 1 или 0 раз выражаются числами:

$$1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$$

Эти числа получаются с помощью простого метода, названного Паскалем арифметическим треугольником, первые строки которого мы выпишем:

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

. . . .

Если принять, что каждая из этих строк дополнена справа и слева нулями, то можно высказать следующее правило: каждое число в любой из строк есть сумма числа, находящегося над ним в предыдущей строке, и числа, стоящего слева от последнего. Так, третье число в пятой строке это $10=6+4$; четвертое число в этой же строке есть $10=4+6$; пятое число будет $5=1+4$.

Когда число повторных испытаний очень велико, вычисление арифметического треугольника становится весьма длительным, если не невыполнимым. Математики вывели формулы, которые позволяют вычислять числа, фигурирующие в арифметическом треугольнике, равно как и суммы таких чисел, места которых расположены в известных пределах. Что касается вывода этих формул, мы отошлем к работам по исчислению вероятностей [1]) и ограничимся тем, что используем их существенные следствия. Для наших читателей достаточно знать, что эти результаты могут быть получены простым подсчетом всех возможностей,— подсчетом, который мы выполнили в случае четырех последовательных испытаний, но который был бы практически невыполним для миллиона испытаний.

9. Математическое ожидание и вероятное число. Во многих вопросах теории вероятностей удобно ввести понятие математического ожидания. Когда игрок должен получить некоторую сумму, если произойдет некое случайное событие, вероятность которого известна, то его математическое ожидание есть та сумма, которую по справедливости ему должен был бы внести тот, кто купил бы у него шансы на выигрыш. Например, Петр должен выбросить один раз кость и получить 6 франков, если покажется цифра 4. Легко видеть, что его математическое ожидание равно одному франку, то есть произведению суммы (6), которую можно получить, на вероятность благоприятного исхода $^1/_6$.

Действительно, допустим, что банкомет предлагает выбросить кость и каждому предоставляет возможность держать пари на выбранную им грань, получая в случае выигрыша 6 франков. Если шесть различных игроков ставят соответственно на 6 граней кости, то банкомет должен будет

---

[1]) См., например, É. Borel, Eléments de la théorie des probabilités; на русском языке можно рекомендовать В. И. Гливенко, Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939.

в любом случае уплатить 6 франков, так как будет один выигравший, и только один. Для того чтобы игра была справедливой, нужно, чтобы каждый из шести игроков внес банкомету по одному франку, так как нет никаких оснований для того, чтобы кто-либо из них платил больше или меньше, чем другой, поскольку все шесть граней кости одинаково вероятны. Отсюда мы заключаем, что значение математического ожидания для каждого игрока составляет один франк.

Надо заметить, что численное значение математического ожидания не всегда соответствует вероятной и даже возможной прибыли. Например, если Петр пошел на то, что он будет бросать 11 раз кость и получать 6 франков всякий раз, как выпадет цифра 4, его математическсе ожидание составляет 11 франков, а между тем достоверно, что он ни в каком случае не получит эту сумму: он получит 0, 6, 12, 18, 24, ... франков, смотря по тому, выпадет ли цифра 4 у него 0, 1, 2, 3, 4, ... раз. Можно лишь утверждать, как мы это с точностью увидим в дальнейшем, что при достаточно большом числе подобных партий он в *среднем* получит 11 франков за партию. В силу этого иной раз говорят, что 11 франков — это его средний, или *вероятный*, выигрыш. Наоборот, говорят, что его *наиболее вероятный* выигрыш есть 12 франков, так как легко видеть, что чаще всего будет иметь место выигрыш в двух партиях из одиннадцати. Но этот *наиболее вероятный* выигрыш значительно менее интересно определить, чем выигрыш *вероятный*, или средний.

Применение математических ожиданий во многих вопросах имеет то большое преимущество, что математические ожидания, относящиеся к двум каким-либо событиям, можно попросту складывать, независимо от того, связаны ли эти события друг с другом или нет. Действительно, владелец этих математических ожиданий мог бы их продать двум различным лицам и получить таким образом доход, равный сумме значений этих двух ожиданий [1]).

10. Определение отклонения и единицы отклонения. Предположим, что мы n раз подряд повторяем испытание, при котором вероятность благоприятного события равна p. Обозначим через q вероятность противоположного события,

---

[1]) В указанной выше книге (стр. 20, сноска) можно найти простые применения понятия математического ожидания [4].

то есть события, отличного от благоприятного, и мы будем иметь $p+q=1$.

Например, при игре в рулетку, где имеем 36 номеров и нуль, вероятность получить нечетное число есть $^{18}/_{37}$, противоположное событие (четное число или нуль) имеет вероятность $^{19}/_{37}$. Так же точно обстоит дело с красным цветом, потому что 18 из 36 номеров имеют этот цвет.

Если произвести n испытаний, вероятное число благоприятных событий равно np, и это вероятное число в большинстве случаев может не быть целым числом. Обозначим фактически наблюдавшееся число благоприятных событий через $np+h$, где число h может быть положительным или отрицательным. Это число h, по определению, называют *отклонением*, и существенной задачей теории повторных испытаний является определение закона отклонений, или точнее, вероятностей того, что отклонения будут находиться в тех или иных пределах.

Когда число n мало, арифметический треугольник позволяет немедленно решить эту проблему. Допустим, например, что мы проводим последовательно четыре партии игры в орла и решку и рассмотрим определенное сочетание четырех букв О и Р, например РРОР. Вероятность получить Р в первой партии равна $\frac{1}{2}$, вероятность получить Р во второй партии также равна $\frac{1}{2}$, вероятности для О в третьей и Р в четвертой — тоже равны $\frac{1}{2}$. Следовательно [5], вероятность получить РРОР равна произведению четырех множителей, равных $\frac{1}{2}$, так что эта вероятность равна $^{1}/_{16}$; такова же будет вероятность каждого иного сочетания, состоящего из четырех букв О и Р. Но мы знаем, что среди этих сочетаний (см. § 8) есть одно, которое содержит 4Р, и одно, которое содержит 4О; есть 4, которые содержат 3Р и 1О, а также 4, которые содержат 3О и 1Р, и, наконец, есть 6, содержащих 2Р и 2О. Эти последние сочетания соответствуют отклонению h, равному 0; вероятность такого отклонения, следовательно, $^{6}/_{16}={}^{3}/_{8}$. Есть четыре сочетания, соответствующих отклонению $+1$, и четыре сочетания с отклонением -1; вероятность каждого из этих отклонений есть $^{4}/_{16}$, или $^{1}/_{4}$. Наконец, вероятность каждого из отклонений 2 и -2 составляет $^{1}/_{16}$.

Но, как мы уже сказали, как только число n становится достаточно большим, превосходит 40 или 50, вычисление арифметического треугольника будет слишком обременительным, и тогда выгодно использовать приближенные формулы, выведенные как раз при допущении, что значение n достаточно велико. Эти формулы дают вполне удовлетворительные приближенные результаты, как только n превосходит значения, при которых арифметический треугольник неприменим[1]).

Эти формулы основаны на рассмотрении числа u, которое называется единицей отклонения и, по определению, равно корню квадратному из $2npq$. Мы уделим особое внимание двум частным случаям, весьма важным для практики. Первый из этих случаев тот, когда два числа p и q равны или мало отличаются одно от другого (как в случае рулетки $^{18}/_{37}$ и $^{19}/_{37}$). Произведение pq тогда равно $^{1}/_{4}$ (или мало от этого отличается), так что единица отклонения равна корню квадратному из $n/2$. Но $n/2$ при $p = ^{1}/_{2}$ как раз равно вероятному числу благоприятных событий. Следовательно, в рассматриваемом частном случае единица отклонения u равна как раз корню квадратному из этого вероятного числа.

Второй частный случай — тот, когда число p мало и, следовательно, число q настолько близко к единице, что его можно принять за единицу. Например, так обстоит дело, когда ставят на определенный номер в рулетке: вероятность p тогда $^{1}/_{37}$, а q равна $^{36}/_{37}$. Единицу отклонения u можно принять в этом случае равной корню квадратному из $2np$, то есть корню квадратному из *удвоенного* вероятного числа благоприятных событий.

Существенным результатом теории повторных испытаний является следующий: когда известна единица отклонения u, можно утверждать, что вероятность того, что отклонение содержится между $-\lambda u$ и λu, *зависит только от числа* λ. Таким образом, среди всех задач на повторные испытания, относящихся к различным числам n и p, имеется известная схожесть или подобие: достаточно подсчитать число u с помощью данных задачи, и эти данные войдут в результат только посредством этого числа.

Иногда мы будет называть λ, положительно оно или отрицательно, относительным отклонением; тогда о произведении λu говорят как о действительном, или абсолютном, отклонении (но не надо смешивать с абсолютным значением отклонения).

---

[1]) Чтобы быть вполне точным, следует добавить, что если одно из чисел p или q очень мало́, то условимся выбирать n достаточно большим с тем, чтобы произведения np и nq не были слишком малы (например, превосходили 10 или 20).

11. Важные результаты о вероятности относительных отклонений. В трактатах по теории вероятности можно найти таблицы, в которых приводятся вероятности того, что относительное отклонение меньше заданного числа λ. Здесь мы ограничимся весьма краткими указаниями, достаточными для тех приложений, которые мы имеем в виду в этой книге.

Вот вероятности того, что отклонение h не заключено между $-\lambda u$ и λu для некоторых значений λ, взятых в арифметической прогрессии:

$\lambda = 1{,}15$	вероятность	10^{-1}
$\lambda = 2{,}30$	»	10^{-3}
$\lambda = 3{,}45$	»	10^{-6}
$\lambda = 4{,}60$	»	10^{-10}

Сразу же скажем, что для упрощения таблицы мы слегка изменили значения λ, но для тех приложений, которые нас интересуют и в которых особенно существенны порядки величин, эти сознательные искажения не имеют значения. Те из наших читателей, которые пожелают провести точные расчеты, должны будут обратиться к таблицам функции, обозначаемой $\theta(\lambda)$.

Вероятности, которые соответствуют значениям λ, входящим в нашу таблицу, соответственно равны одной десятой, одной тысячной, одной миллионной и одной десятимиллиардной. Мы увидим, что эти вероятности соответствуют для противоположного события (то есть для того, чтобы отклонение содержалось между $-\lambda u$ и λu) степени достоверности от события вполне вероятного до события достоверного с переходом через очень вероятное и исключительно вероятное.

12. Применение к задаче о разорении игрока. Мы применим теперь эти результаты к задаче о разорении игрока, долго возбуждавшей страсти у теоретиков-вероятностников. Мы увидим, что если игра справедлива, то это разорение, хотя и в полном согласии с предсказаниями математиков, происходит, однако, достаточно медленно для того, чтобы тот, кто не ведет слишком большую игру, не имел оснований беспокоиться.

Рассмотрим игрока в орла и решку с раз навсегда установленной ставкой, которую мы примем равной одному франку. Каждый читатель может умножить эту цифру на

10, 100 и 1000, .., и ему достаточно будет умножить на то же число результаты, которые мы получим. Само собой разумеется, те же результаты применимы в более сложной игре, чем орел и решка, при условии, что шансы обоих игроков всегда равны. Так обстояло бы дело с игроком, который постоянно ставил бы на красное или черное, на чет или нечет в рулетке *без нуля.* Так же обстояло бы дело и с игроком в экарте или пикет, который состязался бы с игроками *одинаковой с ним силы.* Все же надо заметить, что наиболее верным средством для выяснения, одинаковой ли силы два игрока, является наблюдение за тем, будут ли отклонения при большом числе сыгранных между ними партий находиться в пределах, указываемых вычислением.

Допустим, что каждая партия продолжается только несколько секунд, а это позволило бы сыграть в течение дня несколько тысяч, а в течение года около миллиона партий. Вероятное число выигранных партий в этом случае 500 000, а единицей отклонения является корень квадратный из этого числа, примерно 707, произведение которого на 4,6 равно приблизительно 3250. Следовательно, можно утверждать, что число выигранных партий заключено между 503250 и 496750, так как вероятность противоположного события меньше одной десятимиллиардной. Итак, нашему игроку понадобилось бы повторять игру в течение 10 миллиардов лет, чтобы имелись заметные шансы на то, что его выигрыш или проигрыш в течение одного из этих лет превзошел 3250. Если наш игрок играет подряд 64 года, относительное отклонение *u* умножится на 8 (корень квадратный из 64) и мы должны будем заменить 3250 его произведением на 8, то есть 26 000.

Таким образом, азартный игрок может миллион раз ставить 1 франк в орла и решку каждый год в течение 64 лет, то есть в общей сложности поставить 64 миллиона, рискуя при этом потерять в общем не больше 26 000 франков. Однако, чтобы быть точным, следует добавить, что мы рассуждали так, как если бы расчеты по пари производились только после окончания всех игр, но не исключено, что в ходе партии из 64 миллионов игр убыток игрока превзойдет указанную сумму [1]). Это не меняет сути наших заключений.

---

[1]) Отсылаем в связи с этим к первому выпуску книги: Е. Borel, Traité du calcul des probabilités et ses applications (см. также Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, 2-е изд., стр. 361—364.— *Ред.*).

Общая сумма, которую рискует потерять игрок, растет как корень квадратный из числа партий. Если речь идет об играх, требующих некоторого размышления, как экарте, число партий едва ли может превзойти 100 в течение дня и миллион в течение 27 лет. Следовательно, отклонение практически никогда не превзойдет ставки более чем в 3000 раз, то есть трех миллионов при ставке в 1000 франков. Таково должно быть соотношение между обычной ставкой и имуществом азартного игрока, который не хочет разориться.

При этом игра предполагается справедливой, что может иметь место при игроках, знающих друг друга. Но профессиональному игроку приходится посещать клубы и казино, которые, какова бы ни была их бескорыстность, вынуждены присваивать известную долю ставок, чтобы оплатить свои расходы на помещение, инвентарь и персонал, не говоря уже о налогах. Это присвоение происходит либо прямым образом (например, из сумм, поставленных банкометом при игре в баккара), либо косвенно, с помощью правил игры (нуль рулетки). Легко увидеть, что такое присвоение влечет за собой значительное убыстрение разорения игроков и, главное, делает его абсолютно достоверным. Действительно, все происходит так, как если бы банкомет присваивал известную долю ставок, долю, строго пропорциональную общей сумме ставок, тогда как максимальный выигрыш (или отклонение) увеличивается только пропорционально корню квадратному из числа партий. При миллионе партий этот максимальный выигрыш не может превзойти более чем в 3000 раз обычную ставку, тогда как изъятие в пользу игорного заведения всегда превышает одну сотую ставок и, следовательно, при миллионе партий в 10 000 раз больше ставки. Таким образом, тот, кто участвует в миллионе партий, может быть абсолютно уверен в том, что даже если счастье ему будет благоприятствовать, он потеряет по крайней мере в 7000 раз больше своей средней ставки.

13. Закон больших чисел. Из закона отклонений можно вывести закон больших чисел, который впервые был сформулирован в XVIII веке Яковом Бернулли. Будем рассматривать неограниченную последовательность повторных испытаний и назовем частотой благоприятного исхода в течение первых n испытаний частное от деления на n числа благоприятных исходов. Обозначим эту частоту через f_n. Закон больших чисел состоит в утверждении, что *когда n неограниченно возрастает, частота f_n стремится к пределу f, который равен вероятности p* [6].

Некоторые современные теоретики утверждали, что этот закон больших чисел является простой тавтологией, так как они думают, что вероятность можно определить только как частоту при очень большом числе испытаний. Если при очень большом числе испытаний эта частота не стремится к пределу, а более или менее колеблется между различными пределами, то надо утверждать, что вероятность *p* не остается постоянной, а изменяется в ходе испытаний. Это имеет место, например, для людской смертности в течение веков, так как успехи медицины и гигиены имеют своим следствием увеличение средней продолжительности жизни. Стало быть, вероятность *p* для родившегося ребенка достичь возраста 60 лет имеет тенденцию к росту. Эта эмпирическая точка зрения вполне приемлема для статистика, изучающего демографические явления, так как здесь мы должны, за неимением других научных средств для предвидения, ограничиться использованием бесчисленных наблюдений. Но для простых явлений, вероятность которых может быть вычислена в силу самой их природы, дело обстоит иначе; такой случай мы имеем при игре в кости, при наблюдениях за правильно сконструированной рулеткой, при некоторых физических и биологических явлениях, о которых речь будет идти дальше.

Если мы бросаем кость небольшое число раз и всякий раз отмечаем полученный результат, мы заметим, что между различными результатами есть существенная разница: если кость бросали 60 раз, мы, быть может, получим 13 раз число 6 и только семь раз число 5. Но закон отклонений учит нас, что если кость бросать 30 000 раз, то отклонение вероятного числа 5000 от действительного числа раз, когда появится 6, не может превзойти единицы отклонения с небольшим множителем, что в данном случае примерно равно 100 (корень квадратный из 5000×2). Следовательно, частота появления 6 будет заключена между частными от деления на 30 000 чисел 5300 и 4700, так что она будет отличаться от вероятности $^1/_6$ меньше чем на одну сотую. Если бы число испытаний было во 100 раз больше, единица отклонения была бы только в 10 раз больше и разница между частотой и вероятностью достоверно была бы меньше одной тысячной.

На этом простом примере мы наблюдаем механизм действия закона больших чисел. Мы обозначили через $np+h$

наблюденное число благоприятных событий, и мы знаем, что положительное или отрицательное отклонение h не может превзойти λu — произведения единицы отклонения u на небольшой множитель; а эта единица отклонения есть корень квадратный из $2npq$, то есть произведение определенной числовой постоянной на корень квадратный из n. Итак, частота f, равная частному от деления на n числа $np+h$, равна вероятности p плюс положительный или отрицательный член, содержащий отношение корня квадратного из n к n, то есть имеющий в знаменателе корень квадратный из n, тогда как числитель — это число λ, о котором мы знаем, что для него крайне маловероятно превзойти 4 или 5. Таково, на обычном языке, самое простое доказательство закона больших чисел. Долгое время оно казалось удовлетворительным. Более глубокие исследования показали, что для полной строгости доказательства надо использовать теорию счетных вероятностей [1]), которую здесь мы не можем излагать, но которую читатели могут найти в одной из уже цитированных книг.

Однако надо согласиться с эмпиристами в том, что если в ходе длительного наблюдения за повторными испытаниями обнаружилось противоречие с законом больших чисел, мы должны отсюда заключить о неверности принятого нами значения для вероятности и постараться получить более правильное значение, стремясь одновременно и к учету результатов эксперимента и к углубленному исследованию используемого материала. Например, мы можем заключить, что такая-то кость имеет определенную асимметрию, а при тщательных наблюдениях открыть, в чем именно эта асимметрия состоит. Такой факт ничуть не снижает значения закона больших чисел как математического закона, установленного с помощью правильных вычислений; он просто доказывает, что мы имеем дело со случаем, когда совокупность сведений, с помощью которых определена вероятность, содержит неточные элементы: мы предполагали, что наша кость была правильно изготовлена, тогда как это не имеет места.

14. Многократные испытания и точные вероятности. С теорией повторных испытаний можно связать то, что называется многократными испытаниями, состоящими в выполнении одного и того же испытания при условиях не

[1]) Мы сохраняем термин Э. Бореля, означающий, что возможных значений бесконечно много, но их все можно перенумеровать. (*Ред.*)

вполне идентичных, а имеющих переменный элемент. Например, последовательно обращаются к некоторой группе людей и требуют от каждого человека наудачу выбрать целое двузначное число. Если один из них не понимает вопроса и отвечает неправильно, то это не учитывается.

Использование многократных испытаний позволяет с помощью мало известных или грубо приближенных вероятностей определять некоторые вероятности с очень большой точностью.

Чтобы составить себе об этом представление, мы решим следующую задачу. Не зная, будет ли число a четным или нечетным, мы примем, что вероятность его четности есть $\frac{1}{2}+\varepsilon$, а его нечетности $\frac{1}{2}-\varepsilon$. Так же обстоит дело с числом b, только число ε заменяется на ε'. Что можно сказать о числе $a+b$?

Это число $a+b$ четно в двух случаях: или a и b оба четны, или же они оба нечетны. Вероятность его четности, следовательно, равна [1])

$$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right)+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon'\right)=\frac{1}{2}+2\varepsilon\varepsilon'.$$

Отсюда легко заключить, что если в полку n человек и если от каждого требуется указать двузначное целое число, то вероятность того, что сумма n указанных целых чисел будет четным числом, равна

$$p=\frac{1}{2}+2^{n-1}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n.$$

Тут ε_1, $\varepsilon_2,\ldots$, ε_n — положительные или отрицательные числа, которые надо прибавить к ½, чтобы получить вероятность того, что каждый из опрошенных людей выбрал четное число. Эти числа ε нам неизвестны, но мы наперед знаем, что они заведомо меньше ½ по абсолютному значению и, сверх того, почти с достоверностью можно предположить, что они очень малы. Очевидно, может статься, что некоторые предпочитают четные числа, другие же предпочитают нечетные, но неправдоподобно, чтобы это предпочтение доходило до того, что, например, более трех раз из четырех будет выбрано четное число.

---

[1]) Мы используем здесь теоремы о сложении и умножении вероятностей, которые излагаются в начале всех курсов теории вероятностей [7].

Итак, если предположить, что по абсолютному значению числа ε меньше $^1/_4$, то разность между p и $\frac{1}{2}$ будет меньше отношения единицы к n-й степени 2. Если $n = 1000$, то есть в полку 1000 человек, то 1000-я степень 2 есть число, превышающее 300-ю степень 10 (так как 10-я степень 2, то есть, 1024, больше 1000, куба 10). Мы определили, таким образом, вероятность p с ошибкой меньше крайне малого числа; в главе VI мы увидим, с помощью каких сопоставлений можно попытаться представить себе исключительную малость этого числа, недоступную нашему воображению.

Само собой разумеется, что тот же подход можно использовать во всех случаях, когда вероятность известна очень приближенно, например, заключена между 0,3 и 0,7. Комбинируя подходящим образом достаточно большое число последовательных событий, можно определить сложное событие с вероятностью весьма точной. Например, можно много раз бросать кость, или одновременно бросить большое число костей, и сложить полученные результаты: вероятность того, что последняя цифра суммы будет 0, 1, 2, 3, ... или 9, весьма точно равна одной десятой, причем ошибкой можно вполне пренебречь, если число бросаний очень велико.

Глава III

ВЕРОЯТНОСТИ ПРИЧИН

15. Вероятности причин. Одна простая задача. Мы не будем излагать общую теорию вероятностей причин. Эта теория исходит из того, что называется вероятностью a priori различных возможных причин явления, то есть из более или менее точного знания вероятности этих причин, когда мы еще не наблюдали явление; ставится задача: определить, как изменяется эта вероятность a priori, когда мы имеем результаты определенного числа опытов, в ходе которых рассматриваемое явление могло либо произойти, либо не произойти.

Мы ограничимся элементарными случаями, когда рассуждения, основанные на здравом смысле, позволяют получить точные и интересные результаты. Рассмотрим самую простую игру — в орла и решку. Вообще используемую монету считают такой, что вероятности орла и решки строго равны, и их общее значение есть ½. Мы видели при этих условиях, что если сделать миллион опытов, единица отклонения *u* есть корень квадратный из вероятного числа благоприятных случаев, то есть из 500 000, и составляет 707. С другой стороны, мы знаем, что вероятность отклонения, в 4,6 раза большего единицы отклонения, то есть отклонения примерно в 3250, составляет одну десятимиллиардную. Мы можем добавить, что для двойного отклонения, то есть 6500 вместо 3250, эту вероятность надо возвести в 4-ю степень, что дает 10^{-40} вместо 10^{-10}; доказательства этого результата наши читатели найдут во всех книгах по теории вероятностей [8].

Предположим теперь, что у нас хватило бы терпения миллион раз подбрасывать монету и что 506 500 раз выпал бы орел. Законно задать себе вопрос, какова причина этого явления. Мы, естественно, будем колебаться между двумя гипотезами: либо вероятности выпадения орла и решки равны, но имело место необычайное отклонение, либо вероятность выпадения орла несколько больше вероятности выпадения решки. Разумеется, наряду с этими гипотезами, при которых эксперимент предполагается корректным, следовало бы упомянуть о гипотезах, что эксперимент не таков, как мы описали, например, лицо, которому поручено отмечать последовательные результаты, рассеянно или плутует; оно ошибается, или обманывает нас; или же лицо, которому поручено бросать монету, достаточно ловко, чтобы влиять на результат, и иной раз использует эту ловкость, чтобы получился орел. Как мы сказали в конце главы I, мы исключим такие гипотезы, что совокупность наших сведений ошибочна из-за плутовства или других обстоятельств.

Итак, окончательно надо выбирать только между двумя гипотезами: случайного исключительного отклонения, или несколько большей, чем половины, вероятности выпадения орла. Но мы знаем, что вероятность реализации такого исключительного отклонения равна примерно 10^{-40}, и это внушает нам уверенность [1]), что такое не имеет места. Наоборот, две стороны монеты не тождественны, стало быть, гипотеза небольшого отличия между вероятностями орла и решки не содержит ничего неправдоподобного и именно ее надо принять.

16. Обсуждение предыдущей задачи. Можно поставить вопрос, к какому мы должны прийти заключению, если в предыдущей задаче вместо более или менее асимметричной монеты использовать тщательно изготовленный металлический жетон, который можно рассматривать как идеальный цилиндр. Чтобы различать два основания этого цилиндра, можно было бы ограничиться маленьким цветным пятнышком, скажем, красным с одной стороны и зеленым с другой. Строго говоря, можно было бы вести игру с жетоном, обе стороны которого были бы неразличимы, ограничиваясь указанием с помощью жеста перед броском, какова та сторона, которую называем орлом. Этот жест и вся операция могли бы быть засняты из двух или трех точек, и при замедленном просмотре таких фильмов можно было бы определить, упал ли жетон вверх той стороной, на которую мы указали. Равным образом, вместо того чтобы использовать монету, можно обратиться к одному из способов,

---

[1]) Что касается степени этой уверенности, мы отсылаем читателя к последним главам этой книги.

указанных в § 14, чтобы получить вероятности, строго равные ½ с совершенно пренебрежимой ошибкой.

Если при миллионе испытаний, в течение которых вероятность благоприятного случая заведомо равна ½ (ошибка крайне мала), получим, что число благоприятных случаев равно 510000, то мы окажемся вынужденными выбирать одну из двух в равной мере неправдоподобных гипотез: исключительно большого отклонения и ошибочности значения вероятности. От такого выбора надо будет отказаться и допустить, что мы не заметили ошибки в условиях эксперимента: полученный результат вызван неизвестной причиной, которую надо отыскать.

17. Вероятность рождений мальчиков. Предыдущие рассуждения, быть может, показались некоторым читателям лишенными практического интереса, так как совершенно неправдоподобно, чтобы для развлечения играли подряд миллион партий в орла и решку. Однако полученные результаты применимы к проблеме, которая уже издавна обратила на себя внимание статистиков. Во всех цивилизованных странах в течение более чем столетия регулярно регистрируются рождения с указанием пола ребенка — указанием, которое очень редко бывает ошибочным. Таким образом, можно в течение периода от нескольких месяцев до нескольких лет, в соответствии с населением страны и его плодовитостью, получить данные о миллионе рождений, случившихся в этот период. При этом всегда оказывается, что на миллион рождений число мальчиков превосходит 510 000, тогда как число девочек меньше 490 000 [1]. На основании предыдущего можно заключить с достоверностью, что для всех рассматриваемых стран в течение более чем века вероятность, что родится мальчик, есть число, несколько большее чем 0,5, вероятно достаточно близкое к 0,51. Это очень интересный с биологической точки зрения результат, так как он ставит перед биологами весьма трудную проблему. Действительно, современные теории наследственности приводят к заключению, что, хотя мы не умеем еще это выявлять, пол ребенка определяется в момент зачатия. Следовательно, первый вопрос, который надо было бы решить,

[1]) В некоторых соседних странах результаты несколько различны в силу отличий в законодательстве и в обычаях, касающихся мертворожденных и детей, которые прожили лишь несколько часов и умерли до заявления об их рождении.

состоит в том, чтобы узнать, равны ли вероятности с этого момента для обоих полов и вызвана ли наблюдаемая между ними разница в момент рождения большей смертностью девочек во время беременности, или же наоборот, уже с зачатия доля мальчиков более велика. Впрочем, возможно, что оба эти объяснения частично точны, или же что мы наблюдаем лишь результат двух явлений противоположных знаков.

Если бы эти первые вопросы были решены, оставалось бы исследовать биологические причины значений, полученных для вероятностей того или иного пола при зачатии или при утробной смерти.

Эти вопросы не относятся к нашей теме; но нам представлялось интересным показать, как исчисление вероятностей может в некоторых случаях давать биологам достоверное заключение и ставить перед ними определенные задачи [1]).

18. Пол близнецов. Когда рождаются близнецы, они иной раз одного пола, иной раз разных полов. Если мы ограничимся двойнями, то оказывается, что они чаще одного пола, чем разных.

Подойдем к этому вопросу численно и примем для упрощения, что вероятность рождения мальчика или девочки равна 0,5 (вместо 0,51 и 0,49). Если рассмотреть два независимых рождения (в двух разных семьях), легко видеть, что вероятность иметь двух мальчиков есть 0,25, двух девочек тоже 0,25, а вероятность иметь одного мальчика и одну девочку равна 0,50 (так как имеется вероятность 0,25 иметь мальчика в первой семье и девочку во второй, и вероятность 0,25 иметь девочку в первой семье и мальчика во второй).

---

[1]) Доля 0,51 для мужских рождений почти в точности соответствует 1040 мальчикам на 1000 девочек. В действительности, число мальчиков на 1000 девочек во Франции в течение указанных ниже лет и периодов составляло (учитываются дети, заявленные живыми):

1921—1925 . .	1050	1943 . . .	1061
1935—1939 . .	1038	1944 . . .	1059
1940 . .	1040	1945 . . .	1056
1941 . .	1038	1946 . . .	1056
1942 . .	1055	1947 . . .	1057

Таким образом, обнаруживается уже отмечавшееся явление, что число мужских рождений несколько увеличивается в периоды после больших войн.

Доля мальчиков на 1000 девочек среди мертворожденных значительно выше и достигает 1300—1400.

Если имеем дело с двойнями, то оказывается, что доля тех случаев, когда двойни одного пола, вместо того, чтобы составлять 0,50, значительно больше и равна примерно 0,64. Самый простой способ для объяснения этого обстоятельства и наиболее правдоподобный, поскольку известно, что некоторые двойни рождаются из одного яйца, а другие из двух различных яиц, состоит в допущении, что в некоторых случаях пол одного из двух близнецов заведомо таков же, как пол второго, тогда как в других случаях эти два пола совершенно не зависят один от другого. Если вероятность того, что имеем первый случай, равна p, а вероятность второго случая, следовательно, есть $1-p$, то вероятность того, что близнецы одного пола, равна

$$p+0{,}5(1-p)=0{,}5(1+p),$$

потому что если оба пола независимы один от другого, есть один шанс из двух, чтобы они оказались тождественными.

Сравнение вычисленного нами значения для вероятности пар одного пола с наблюденным значением 0,64, дает $p=0{,}28$. Такова вероятность того, что два близнеца, которых первыми заявят в таком-то городе, начиная с завтрашнего утра, являются однояйцовыми.

Аналогичный подсчет можно проделать для тройных рождений. Рождения четырех и, тем более, пяти близнецов слишком малочисленны, чтобы к ним можно было применить исчисление вероятностей.

19. Зондаж общественного мнения. Организации, занимающиеся зондажем общественного мнения и обычно называющие себя институтами, более или менее сознательно используют методы исчисления вероятностей [9]. Здесь возникает существенный вопрос,— установить, вызван ли определенный результат, полученный на основании большинства при зондаже, реальным большинством.

Первый вопрос, который здесь надо поставить, это выяснить, имеет ли смысл только что сформулированная задача, то есть имеем ли мы право говорить об общественном мнении по поводу того или иного определенного вопроса. Хорошо известно, что в результатах, которые публикуются институтами общественного мнения, почти всегда фигурирует некоторое число ответов, в которых опрошенное лицо признается в своем полном незнании поставленного перед ним вопроса. Но, отвлекаясь от таких в некотором роде нулевых ответов, процент которых известен, можно спросить себя, не впервые ли размышляли над поставленным перед ними вопросом многие из опрошенных лиц, что означает невозможность, строго говоря, говорить о мнении, которое они должны были иметь до опроса. Имеются в таком случае основания считать, что так же обстоит дело со значительной частью неопрошенных лиц, и поэтому не является правильным говорить об определенном состоянии общественного мнения по данному вопросу.

Однако есть случаи, когда можно допустить, что значительное большинство граждан в той или иной стране действительно обладают определенным мнением о некоторых жизненных политических вопросах. Мы предположим, что мы имеем дело с одним из таких случаев и что, например, за несколько недель до выборов президента значительное большинство граждан знает, что они будут голосовать за кандидата А или Б, или В, или что они воздержатся от голосования. Мне известно, что такое допущение вызывает немало возражений, но надо рассматривать его как наиболее благоприятное для правильного хода зондажей общественного мнения, и поэтому естественно в первую очередь заняться им.

Все происходит таким образом, как если бы у каждого гражданина в уме была одна из четырех букв А, Б, В, Н, причем три первые соответствуют трем кандидатам, а последняя — воздержанию от голосования. Мы должны, кроме того, допустить, что если такой гражданин опрашивается институтом общественного мнения и если ему предоставляется возможность голосовать в тех же условиях сохранения тайны, как и в день выборов (сложив бюллетень, он опустит его в урну, предварительно отметив крестиком одну из букв А, Б, В, Н), то этот гражданин будет голосовать так, как он голосовал бы в действительности в день выборов. Тогда возникает задача, как надо действовать, чтобы с достаточной точностью определить вероятный результат голосования.

20. Предсказание исхода голосования. Задача, которую мы поставили, равносильна следующей (предполагая, что мнение каждого из избирателей столь же неизменным образом связано с ним, как черный или белый цвет — с шаром, находящимся в урне). Урна содержит очень большое (превосходящее 100 000, а иной раз и несколько миллионов) число белых, красных, зеленых и черных шаров. *Сколько надо проделать извлечений из урны, чтобы с достаточной точностью узнать ее содержимое?* В частности, мы будем изучать вопрос, можно ли на основании извлечений быть уверенным, что белые шары находятся в урне в абсолютном большинстве (черные шары можно рассматривать как воздержание и не учитывать их при подсчете абсолютного большинства).

Очевидно, для того чтобы решить эту задачу, достаточно вычислить единицу относительного отклонения для результата при определенном числе извлечений. Отсюда первое замечание, а именно, что с момента, когда число содержащихся в урне шаров достаточно велико, не имеет значения, составляет ли оно 100 000 или 50 миллионов: по одному и тому же числу извлечений можно будет узнать его состав с одной и той же вероятной ошибкой. Другое замечание заключается в том, что если число шаров в урне велико по сравнению с числом извлечений, то не имеет значения — кладется ли извлеченный шар тотчас же обратно в урну или же извлечения выполняются последовательно, без возвращения шаров [1]).

Обычно сходятся на том, что берут в качестве числа извлечений, необходимых для получения разумной точности, 5000 [2]). Если принять, что процент белого цвета близок к 0,5, то вероятное число белых шаров будет 2500, а единица отклонения будет равна 50. Мы знаем, что вероятность отклонения, которое равно или больше $2{,}30u$ (u — единица отклонения), то есть в данном случае примерно 115, составляет около одной тысячной. Такое отклонение соответствует 2615 белых шаров, то есть 52,3%, если отклонение положительно, и 47,7%, если оно отрицательно. Отсюда заключаем, что если число белых шаров превышает 52%, то можно утверждать, имея 999 шансов из 1000 не ошибиться, что «белых» большинство среди избирателей.

---

[1]) Простой подсчет показывает, что невозвращение извлеченного шара увеличивает шансы на то, чтобы процент различного цвета среди извлеченных шаров приближался к проценту в урне. Другими словами, единица отклонения слегка уменьшается.

[2]) Это число оставалось бы тем же (само собой разумеется, при условии возвращения в урну извлеченного шара) и тогда, когда число шаров меньше чем 5000, но этот случай не представляет никакого интереса в рассматриваемой задаче.

В этом рассуждении мы пренебрегли воздерживающимися от голосования. Если таковые не очень многочисленны, то их влиянием можно пренебречь, так как оно компенсируется различными факторами, имеющими тенденцию уменьшать единицу отклонения. Один из них мы уже указали (то, что извлеченный шар не возвращается в урну после каждого извлечения), некоторые другие мы укажем ниже (разбивка извлечений).

21. Разбивка извлечений. Когда 50 миллионов шаров в урне представляют 50 миллионов избирателей какой-то страны, то задача организовать случайную выборку избирателей представляется практически достаточно сложной. Самым простым способом ее решения была бы нумерация всех этих избирателей от 1 до 50 000 000 (используя, например, избирательные листы, в которых избиратели уже перенумерованы, и перебирая эти листы один за другим в каком-то порядке). После этого оставалось бы только вытянуть, как в лотерее, 5000 номеров из 50 000 000. Для этого было бы достаточно извлечь наудачу четыре цифры и считать выпавшими все номера, которые оканчиваются этими цифрами, например, на 3517. Замечания, которые мы хотим сделать относительно разбивки извлечений, имеют целью показать, что такой метод может только уменьшать единицу отклонения. Дело обстояло бы иначе, если бы пришли к мысли выбрать тех избирателей или избирательниц, у которых одна и та же фамилия и одно и то же имя (из числа распространенных,— во Франции, например, Пьер Дюран или Жанна Дюпон). Действительно, при таком методе мы рисковали бы получить нескольких лиц из одной и той же семьи, мнения которых иной раз одинаковы, более того, мы снизили бы шансы некоторых этнических областей (например, во Франции — Эльзаса, Бретани, района басков) и увеличили бы, возможно, шансы других областей.

Однако достаточно естественно стараться раздробить выборку, вводя либо территориальные, либо профессиональные признаки, тем более, что это может дать интересные выводы.

Например, 50 000 000 избирателей можно разбить на 50 штатов, каждый из которых в среднем будет насчитывать один миллион, а в каждом штате надо будет выбрать избирателей из расчета 1 на 10 000. Можно также разбить избирателей на категории в зависимости от профессии.

Если некоторые категории будут слишком многочисленны, то есть будут превышать несколько миллионов, их можно подразделить по возрастному признаку (от 20 до 30 лет и т. д.).

Но будет ли разбивка произведена по территориальному или профессиональному признаку, является почти достоверным, что процент голосующих за определенного кандидата, названных нами «белыми», будет значительно изменяться от одной области к другой и от одной профессиональной группы к другой. Но для каждой группы надо будет извлечь один шар из 10 000, то есть выбрать одного избирателя или одну избирательницу из 10 000.

Действуя таким образом, мы значительно уменьшим единицу отклонения. Мы не будем приводить здесь общего доказательства этого факта, но пояснить это можно на примере. Если миллион избирателей определенной категории, например, шахтеры или жители какого-то штата, были одного и того же мнения, то 100 случайных выборок дадут один и тот же результат и, следовательно, выборка в этом крайнем случае точно характеризовала бы данную категорию избирателей. Тогда единица отклонения была бы равна нулю, если бы дело обстояло так же для любой категории (причем мнение может, конечно, изменяться от категории к категории), единица отклонения была бы равна нулю и в каждой из частичных выборок, и, следовательно, она была бы равна нулю вообще.

Институты общественного мнения в своих публикациях обычно сообщают процент благоприятных или неблагоприятных ответов отдельно для различных профессиональных категорий и при этом часто приводят отдельно ответы мужчин и ответы женщин. В связи с этим необходимо сделать одно замечание. Допустим, что наши профессиональные (или территориальные) категории содержат по одному миллиону лиц. Если мы в них будем выбирать одно лицо из 10 000, число выбранных будет 100, и если принять вероятность белого цвета равной 0,5, вероятным числом будет 50. Корень квадратный из 50 равен примерно 7 и это — единица отклонения; ее произведение на 1,15 составляет около 8, на 2,3 — около 16. Следовательно, если один шанс из десяти за то, что отклонение превысит 8, и один шанс из тысячи, что оно превысит 16. В первом случае доля белых меньше 42% или больше 58%; во втором случае она меньше 34% или больше 66%.

Итак, мы видим, что проценты, получаемые при выборке даже для сравнительно многочисленных категорий (из миллиона индивидов) далеко не столь точны, как общие результаты, вычисленные для всей страны. Но так как эти ошибки в силу случайности выборок не являются систематическими, а являются то положительными, то отрицательными, они в известной мере взаимно погашаются при сложении частных итогов для общего подсчета. Отсюда — значительно большая точность общего итога.

22. Оценки экспертов. Очевидно, что тому, кто знает достаточно много людей данной профессии или жителей известной области, легче оценить вероятный процент голосов среди людей этой профессии или в этой области, чем дать такую оценку для всей страны. По-видимому, на этом основан следующий метод зондажа, используемый институтами общественного мнения. Ограничимся разбивкой на категории по профессиям. Институты общественного мнения стараются выбрать для каждой профессии некоторое число лиц, которых они рассматривают как представляющих в этой профессии различные направления и по ответам которых они оценивают процент людей в данной профессиональной группе, придерживающихся того или иного мнения. Таким же образом можно поступать при политических выборах, исходя из территориального признака, потому что лица, хорошо знающие данную область, могут относительно точно оценить вероятный результат выборов в этой области.

Не исключена возможность (хотя это не достоверно), что когда имеют дело с профессиями или областями, насчитывающими миллион людей, такая предварительная оценка не может быть столь же хорошей, тем более — лучшей, чем оценка на основании случайной выборки (последняя один раз из десяти может дать ошибку в 8 процентов в ту или другую сторону). Но, как мы видели, случайная выборка имеет то преимущество, что вследствие случайности отклонений сложение многих частных результатов в некоторой степени взаимно компенсирует отрицательные и положительные ошибки и поэтому дает меньшую среднюю ошибку Весьма трудно выяснить, обстоит ли так дело и с приближенными оценками экспертов.

Приведем крайний случай. Вполне очевидно, что крупная политическая партия располагает многими средствами информации и может, вопреки обязательному для нее официальному оптимизму, дать для каждого избирательного округа оценку с ошибкой не более чем на три или четыре процента (то есть 53 или 54% вместо 50%). Но если все эти ошибки одного и того же знака, то сумма получится с ошибкой, которая будет равна их среднему и, следовательно, будет больше той, которая получилась бы при случайной выборке, в то время как локальные ошибки порой бывают меньше, нежели при случайной выборке.

Детальное обсуждение различных методов зондажа общественного мнения не относится к предмету этой книги; нашей целью было изложение некоторых принципов, выявляющихся при обсуждении этих методов. Мы собираемся закончить эту главу несколькими замечаниями об имитации случая.

23. Имитация случая. Можно спросить себя, нельзя ли заменить случайную выборку, операцию вслепую и сложную, выбором осмысленным, с теми же преимуществами, а, может быть, даже и с другими преимуществами. Такой вопрос связан с вопросом об имитации случая. Можно ли заменить рулетку служащим, который помещен так, что он не может ни видеть, ни знать ставки, и по своему произволу указывает выигрышный номер по сигналу о том, что игроки внесли свои ставки. Само собою разумеется, такой служащий должен называть нуль *в среднем* не чаще, чем это полагается, то есть один раз из 37. Но оставим в стороне вопрос о нуле и допустим, что служащий выбирает по своему произволу красное и черное. Сможет ли он имитировать случай, то есть называть черное и красное в такой последовательности, что игрок не может ее предвидеть,— игрок, который всегда и при всех обстоятельствах должен иметь равные шансы на выигрыш, ставит ли он на красное или на черное. Легко видеть, что для нашего служащего единственный способ добиться такого результата состоит в том, чтобы отвлечься от своей памяти и, не рассуждая, стараться действительно случайно отвечать на сигнал, совершенно не учитывая свои предыдущие ответы, если это для него возможно. Действительно, пусть он пытается их учитывать и, например, зная, что в течение предыдущих 20 ответов известное предпочтение было оказано красному, будет склонен ответить «черное». Тогда игрок с хорошей наблюдательностью сможет строить свою игру в соответствии с теми соображениями, которые он может приписать нашему служащему, и тем самым увеличит свои шансы выиграть.

Задача, состоящая в выборе из миллиона жителей одной и той же области или из миллиона людей одной и той же профессии ста лиц, которые по возможности точно будут представлять то среднее мнение, которое нам желательно узнать, отличается от предыдущей задачи. Однако ее решение аналогично и, по-видимому, не только чистый и простой случай, но и всякий другой способ может дать достаточно хорошие результаты, лишь бы осуществляющее выбор лицо не знало заранее ответа на поставленный вопрос. В последнем случае бесполезно обременять себя организацией выбора. Действительно, если известно, что из миллиона лиц около 50% будут голосовать за кандидата А, и если, выбирая из миллиона 100 человек, в состав этих ста введут в точности 50 таких, что они будут за А, наш выбор будет, вероятно, лучшим, чем чисто случайный. Но это связано с тем, что поставленная задача была уже решена или, по крайней мере, была уверенность в том, что ее решение известно.

Если обстоятельства не таковы, то, быть может, будут пытаться выбирать лиц, чье мнение неизвестно, но которых, по различным соображениям, рассматривают как особенно типичных для подлежащей изучению группы. Но при этом пренебрегают мнением весьма большого числа людей, возможно, посредственных, однако, таких, чей избирательный бюллетень будет стоить того же, что бюллетень других избирателей. И нет никаких оснований полагать, что голоса тех лиц, которыми пренебрегают, распределятся таким же образом, как голоса выбранных лиц.

Можно попытаться имитировать «случай» с помощью простых эмпирических приемов. Например, выбирают одного из рабочих у выхода из фабрики или пассажира в метро. Но ясно, что таким образом повышаются шансы выбрать одного из тех рабочих, что прилежны в труде и не страдают от безработицы, или одного из тех, кто в силу условий работы, состояния здоровья и по своим средствам (будучи не очень богатым, не очень бедным) чаще всего пользуется метро. И тут весьма возможно, что категории лиц, которыми пренебрегли, дали бы распределение голосов, достаточно отличное от того, что дают выбранные категории.

В итоге приходится снова обратиться к уже сделанному выше замечанию: большое преимущество случайного выбора в том, что нет систематических ошибок и вследствие этого возникает компенсация погрешностей различных результатов, когда берется их сумма. Например, было бы возможно произвольным образом разбить население в 50 миллионов на 5000 групп по 10 000 человек и наудачу выбрать в каждой группе только одно лицо. Очевидно, это единственное лицо не могло бы претендовать на то, чтобы представлять различные направления в группе, а иной раз оно могло бы быть выбранным так, что будет представлять направление, составляющее в группе из 10 000 человек лишь малое меньшинство. И тем не менее, совокупность 5000 выборов дала бы весьма точное представление о среднем мнении 50 миллионов.

В этом случае вполне очевидно, что всякий метод выбора, отличный от случайного, был бы порочен. Ведь направление, которое в каждой группе из 10 000 имело бы лишь несколько сотен сторонников, не имело бы никаких шансов быть представленным, тогда как при случайном выборе оно имело бы около 100 представителей из 5000, если в среднем оно имеет 200 сторонников из 10 000.

Глава IV

ДИФФУЗИЯ ГАЗОВ И ПРИНЦИП ЭВОЛЮЦИИ

24. Кинетическая теория газов. Д. Бернулли создал кинетическую теорию газов еще в XVIII веке [1]), но только во второй половине XIX века Максвелл, а затем Больцман уточнили эту теорию, дали методы расчета и сумели вывести из простых допущений основные свойства газов. В начале XX века наука сделала еще один шаг: молекулярная гипотеза перестала быть гипотезой, превратившись в физическую реальность, особенно благодаря знаменитым работам Ж. Перрэна [10]. Более того, методы, связанные с исчислением вероятностей, позволили не только вывести известные свойства, но и открыть сначала новые свойства, а затем и такие теории, как теория квант, квантовая механика и волновая механика, которые полностью обновили физику.

Отправным пунктом всего этого продвижения явилось представление о массе газа как о совокупности весьма большого числа молекул, находящихся в беспрерывном движении, причем каждая из молекул в течение каждой секунды испытывает большое число ударов то ли о стенки сосуда, содержащего данную массу газа, то ли о другие молекулы. Именно эти удары создают давление газа на стенку сосуда — то давление, которое, будучи приложено к поршню, позволяет привести в движение машину.

Скорости молекул тем больше, чем выше температура газа. Если отсчитывать эту температуру от абсолютного нуля (—273° Цельсия), она пропорциональна среднему значению квадратов скоростей молекул, умноженному на массу молекулы. Отсюда заключаем, что при одной и той же температуре, если взяты различные газы, квадрат средней скорости обратно пропорционален массе молекулы. Например, поскольку масса молекулы кислорода примерно в 16 раз больше массы молекулы водорода, средняя скорость молекулы водорода будет при одной и той же температуре в че-

[1]) Говоря об основателях кинетической теории газов, вместе с Д. Бернулли следует назвать М. В. Ломоносова. (*Ред.*)

тыре раза превышать среднюю скорость молекулы кислорода [1]). И действительно, эта средняя скорость при обычной температуре составляет для кислорода около 450 метров в секунду, а для водорода — 1800 метров в секунду. А так как при сравнительно большой плотности газа (при атмосферном давлении и обычной температуре) средний свободный пробег (то есть расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями) весьма незначителен, мы приходим к заключению, что каждая молекула испытывает огромное число ударов в течение каждой секунды. Каждое соударение двух молекул вообще вызывает изменение скоростей обеих молекул (сумма квадратов этих скоростей остается неизменной в силу закона сохранения энергии). Именно этот механизм вызывает весьма быстрое изменение распределения скоростей при смешении газов с различными температурами, так что температура смеси становится за короткое время равномерной, а распределение скоростей — следующим закону, открытому Максвеллом и затем подтвержденному согласованностью своих следствий с экспериментальными фактами.

Этот закон распределения скоростей был доказан Максвеллом, который опирался на не очевидную гипотезу о том, что вероятности значений проекции скорости на две взаимно перпендикулярные оси являются независимыми. Однако Больцман, дав строгое, не зависящее от этой гипотезы доказательство закона Максвелла, тем самым доказал и справедливость самой гипотезы.

25. Смешение газов. Мы не можем привести здесь математические формулы кинетической теории и, тем более, формулы статистической механики — обобщения этих кинетических теорий, принадлежащего Гиббсу [2]). Но некоторые

---

[1]) Строго говоря, вместо средней скорости нам следовало бы говорить о корне квадратном из среднего значения квадратов скоростей. Но если эти два числа и не равны, легко доказать, что их отношение есть просто постоянная, если отклонения от среднего значения следуют закону Лапласа — Гаусса, что, согласно Максвеллу, имеет место для скоростей молекул газа.

[2]) Те читатели, которые заинтересуются этими вопросами, могут найти их изложение в двух выпусках трактата Бореля по теории вероятностей: É. Borel, Mécanique statistique classique, и J. Perrin, Mécanique statistique quantique.— На русском языке можно рекомендовать превосходные книги: М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944, и А. Я. Хинчин, Математические методы статистической механики, Гостехиздат, 1943. (*Ред.*)

простые результаты требуют лишь очень элементарных арифметических расчетов.

Рассмотрим два одинаковых сосуда, содержащих два различных газа под атмосферным давлением и при одинаковой температуре. Эти два сосуда соединены трубкой, перекрытой краном. Мы открываем кран,— что произойдет? Опыт показывает, что по истечении сравнительно короткого времени — не более чем через несколько часов (если только трубка не слишком узка) — каждый из двух сосудов будет содержать смесь обоих газов,— смесь, которая в обоих сосудах окажется однородной и одинаковой. И такое состояние, раз установившись, будет сохраняться неопределенно долго, причем экспериментально нельзя будет заметить малейшей неоднородности.

Объяснение этого факта с точки зрения кинетической теории довольно просто: движение каждой молекулы в силу бесчисленных испытываемых ею толчков следует рассматривать как совершенно беспорядочное, то есть подчиненное случаю (и именно случай в любое мгновение навязывает закон распределения скоростей Максвелла; этот закон применим не только к совокупности скоростей различных молекул в данный момент, но и к совокупности последовательных скоростей одной и той же молекулы в течение определенного периода при условии, что учитывается продолжительность промежутков, в течение которых наблюдается каждая из этих скоростей). Следовательно, по истечении промежутка времени, достаточно долгого по сравнению с промежутком между двумя соударениями (промежутком, который значительно меньше одной миллионной секунды), для любой молекулы вероятности очутиться в любом из сосудов (сосуды предполагаются равными) равны. Допустим, что наши сосуды литровые и что газы находятся при обычной температуре и под атмосферным давлением; тогда число молекул каждого газа будет около 10^{22}. Если мы хотим узнать состав смеси, находящейся в одном из сосудов, нужно представить себе, что для каждой молекулы осуществляется случайная выборка и молекула оказывается справа или слева, в зависимости от того, выпал ли орел или выпала решка (или чет и нечет, и т. п.).

Мы знаем, что в таких условиях вероятное число молекул каждого сорта в каждом сосуде равно половине 10^{22} плюс минус некоторое отклонение, закон которого нам известен.

Действительно, мы должны принять здесь в качестве единицы отклонения корень квадратный из вероятного числа, то есть число, меньшее чем 10^{11}, а вероятность отклонения, превышающего в пять раз единицу отклонения, меньше одной десятимиллиардной. Вероятности отклонений, превышающих единицу отклонения в 10 либо во 100 раз, были бы равны соответственно 10^{-40} и 10^{-4000}, то есть числам необычайно малым [1]. Но отклонение, превышающее в 10 раз единичное, равно 10^{12}, а так как имеется 10^{22} молекул, его доля соответствует дроби 10^{-10}, то есть одной десятимиллиардной от общего числа молекул. Крайне невероятно, чтобы неоднородность была столь значительной, стало быть, понятно, что ее нельзя выявить экспериментально, потому что самые точные методы, которыми мы располагаем, не позволяют определить долю газа в смеси с точностью до одной десятимиллиардной. Для этого следовало бы, имея примерно один грамм газа, определить разницу в весе в одну десятимиллионную миллиграмма. Определить эту разницу было бы почти столь же трудно, если бы она была в 10 раз больше, а в этом случае вероятность ее возникновения была бы меньше чем 10^{-400}, и мы докажем, что такая вероятность *абсолютно пренебрежима*.

26. Флуктуации в растворах. Ученые пришли к выводу, что свойства растворов подобны свойствам газов и что молекулы растворенного вещества ведут себя, как молекулы газа. Если раствор весьма слаб, число этих молекул, оставаясь весьма большим, сможет стать все же таким, что возможные флуктуации состава становятся наблюдаемыми. Например, если число молекул на литр раствора в миллион раз меньше, чем для газа, то единица отклонения будет меньше только в тысячу раз, и флуктуация, соответствующая некоторому кратному единицы отклонения, тоже будет в тысячу раз меньше, так что вместо миллиардных долей получим миллионные, а это уже близко к тому, что можно наблюдать.

Именно таким образом, с помощью кинетической теории и исчисления вероятностей, можно учесть явления опалесценции, которые происходят в некоторых растворах вблизи критической точки. За подробностями мы отсылаем читателя к уже цитированной литературе.

---

[1]) Мы уточним эту малость в следующих главах.

Если крайне малая, но все же еще наблюдаемая в микроскоп твердая частица находится во взвешенном состоянии в жидкости, содержащей весьма большое число молекул в состоянии движения, то эти молекулы будут ударяться о частицу много раз в секунду. Эти удары происходят случайно и *в среднем* должны взаимно компенсироваться, то есть среднее алгебраическое проекций количеств движения на какую-либо ось должно равняться нулю. Однако должны быть отклонения от этой нулевой средней, и эти беспорядочные отклонения вызывают смещения частицы и сообщают ей беспорядочное движение, которое называют броуновским, так как Броун первый наблюдал его. Изучение броуновского движения является одним из самых интересных приложений исчисления вероятностей и было предметом многочисленных работ. Здесь нет возможности указать их все [1]).

27. Выравнивание температур. Мы уже сказали, что при соприкосновении двух газов с различными температурами их смесь (предполагается, что она находится в закрытом сосуде) в короткий срок принимает одну и ту же температуру, а скорости молекул распределяются согласно закону Максвелла.

Когда эта одинаковая температура установилась, она сохраняется без изменений, а это означает, что закон Максвелла, верный для совокупности скоростей всех молекул, равным образом верен и для тех молекул, что в данный момент заполняют малый объем, например, кубик со стороной в один сантиметр или даже в один миллиметр. Но это значит, что самые быстрые молекулы (их можно также назвать самыми *теплыми*) [2]) равномерно распределены между различными сантиметровыми кубиками смеси. Разумеется, эта равномерность лишь приближенная, но из-за весьма большого числа молекул отклонения относительно крайне малы и их нельзя наблюдать экспериментально.

Такое выравнивание температур происходит не только в газах, но и в жидких и твердых телах. Когда налицо два тела разных температур, тепло передается излучением от

---

[1]) Упомянем все же важную работу Ж. Перрэна (Thése de doctorat) и более поздние работы Поля Леви.

[2]) Это надо понимать так: теплыми по сравнению со средней температурой газа.

более теплого тела более холодному, так что первое охлаждается, а второе нагревается. Это явление постоянно осуществляется в большом масштабе между Солнцем и Землей: Солнце медленно остывает, а Земля подогревалась бы, если бы она в свою очередь не остывала вследствие ночного излучения.

Сади Карно первый, благодаря гениальной догадке, понял фундаментальное значение для термодинамики и, в частности, для теории паровых машин этого основного факта естественного и постоянного выравнивания температур. Принцип Карно, уточненный Клаузиусом, занял в науке первостепенное место. Теперь его охотно называют принципом эволюции, по соображениям, которые мы сейчас укажем. Вместе с тем, было установлено, что этот принцип существенно основывается на понятии вероятности и, следовательно, все извлекаемые из него выводы надо считать весьма и весьма вероятными, но не абсолютно достоверными.

28. Чудо Джинса. Английский физик Джинс задался вопросом, может ли получиться при таком простом опыте, когда в хорошо нагретую печь ставят сосуд с водой, что вода не закипит, а превратится в лед. Проведя расчеты, весьма сходные с теми, которые намечены выше в связи со смешением газов, Джинс сумел вычислить вероятность того, чтобы произошло то, что позднее было названо *чудом Джинса*, то есть того, что вода превратится в лед и, вследствие этого, что печь дополнительно нагреется.

И вот, вычислив эту вероятность, Джинс заключил, что не следует говорить о таком чуде как о невозможном, а только как о в высшей степени невероятном.

Я должен признать, что в своих предыдущих работах я принимал эти заключения Джинса и то, как он их формулировал. Несомненно, я был под впечатлением того, что с этим соглашались многие математики и физики. Но теперь, как это будет видно в конце данной книги, я того мнения, что следует без колебаний заявить, в согласии со здравым смыслом, что чудо Джинса не произойдет.

Само собою разумеется, я не думаю, что согласие со здравым смыслом является достаточным аргументом; я не забываю, что, как писал Поль Валери, именно здравый смысл долгое время отрицал существование антиподов и движение Земли вокруг Солнца. Но мне кажется, что для чисел весьма больших и весьма малых наше воображение недостаточно, и поэтому в немалой мере обманчиво рассуждать о них так, как о числах, чье точное значение нам доступно.

29. Принцип эволюции. Принцип эволюции (современная форма принципа Карно) состоит в том, что замкнутая система, то есть не получающая энергии из внешнего источника, в своем развитии с необходимостью переходит от состояний менее вероятных к более вероятным. Это имеет место при смешении газов и так же обстоит дело при смешении двух жидкостей с несколько отличными плотностями, например, воды и вина, размещенных одна над другой в вертикальной трубке; по истечении некоторого времени мы получили бы практически однородную смесь, и *разделения вина и воды никогда не произошло бы.*

Можно также дать другую формулировку принципа эволюции, а именно, что замкнутая система не проходит дважды через одно и то же состояние. Действительно, воду и алкоголь можно выделить из смеси, но для этого надо прибегнуть к перегонке (дистилляции), что требует внешнего источника теплоты.

Впрочем, нет необходимости переходить к молекулярному уровню, чтобы наблюдать закон эволюции. Если у нас есть зерна, размеры которых меньше миллиметра, так что на литр их приходится несколько миллионов, причем некоторые из них белые, а другие черные, то легко смешать зерна обоих цветов примерно в равном количестве, чтобы получилась равномерно серая смесь. При этом, встряхивая такую смесь, нам никогда не удастся выделить небольшую однородную массу, целиком черную или целиком белую. Чтобы получить такую однородную массу, нужно было бы набраться терпения и доставать зерна по одному. Но то, что, строго говоря, было бы возможно с зернами, совершенно невозможно с молекулами. Максвелл придумал крохотного демона (известного под именем «демона Максвелла»), который, поместившись перед маленьким отверстием, разделяющим два сосуда, пропускает справа налево только самые быстрые молекулы, то есть самые теплые, а слева направо — только самые холодные, то есть наиболее медленные. С этой целью он применяет заслонку и перекрывает ею отверстие перед молекулой, которая не должна пройти. Действие такой заслонки требует известной работы, и можно ли обойтись работой настолько малой, чтобы этим можно было пренебречь по сравнению с достигнутым результатом? Этим результатом было бы, очевидно, постепенное нагревание газа в левом сосуде, уравновешиваемое постепенным охлаждением газа в сосуде справа. Таким образом, с помощью демона Максвелла, мы получили бы нарушение принципа эволюции, но это не настоящее нарушение, так как демон привнес работу извне.

30. Энтропия. Основатели термодинамики вместе с Клаузиусом определили некую функцию состояния системы, которую они назвали энтропией. Энтропия тела, все части которого одинаковой температуры, равна частному от деления на абсолютную температуру тела количества тепла, которое выделило бы тело при его охлаждении до абсолютного нуля. Принцип Карно — Клаузиуса, или закон эволюции, можно высказать в следующей форме: энтропия замкнутой системы всегда только уменьшается. Теперь энтропию определяют как абсолютное значение логарифма вероятности. Следовательно, когда вероятность возрастает от 0 до 1, энтропия убывает от бесконечности до нуля [11].

Если бы энтропия вселенной стала равной нулю, это означало бы, что достигнуто окончательное состояние, в котором уже невозможна никакая эволюция. Вселенная была бы, следовательно, однородной массой материи одинаковой температуры. Существование бесчисленных звезд, то есть огромных концентраций весьма горячей материи, показывает нам, что мы весьма далеки от этого состояния нулевой энтропии. Время же, необходимое, чтобы его достичь, по сравнению со сроками существования жизни на нашей планете — то же самое, что миллиарды веков по сравнению с одной секундой. Но мы не можем задерживаться на этих космогонических проблемах, в которых сейчас главное — противоречие между законом всемирного тяготения и теми неизвестными причинами, которые вызывают явление расширения вселенной [12]. Обратимся к нашей планете. Здесь, где постоянное поступление солнечного тепла позволяет нарушать закон эволюции, применимый только к изолированной системе, мы замечаем, что биологические явления чаще всего состоят в создании состояний, которые не являются вероятными. Именно так образовались те значительные запасы каменного угля и нефти, которые питают нашу промышленность, именно так наши леса снабжают нас дровами в большом количестве. Однако происходят и такие явления, которые представляются необратимыми, и наиболее существенное среди них — медленное, но нарастающее оползание почвы и спуск скал с гор на равнины и в моря. Можно было бы уменьшить размах этого процесса с помощью лесонасаждений, но и это не ликвидировало бы его, и не представляется возможным извлечь из моря все твердые вещества, сносимые туда реками. Чтобы помешать этому, нужно было бы пропускать реки в их устье через фильтр.

Следствием той разницы в температуре между экваториальными и полярными областями, которая создается солнечным излучением, является значительная разница в температуре экваториальных морей на различных глубинах. Действительно, в океанах устанавливаются теплые поверхностные течения, идущие от экватора к полюсам, и глубокие холодные течения, идущие от полюсов к экватору. Одному изобретательному предпринимателю пришла в голову мысль использовать эту разницу температур в экваториальных морях на различных глубинах. Для этого нужно было бы насосами подавать на поверхность холодную воду с глубины. К сожалению, устройства, необходимые для такой подачи, хорошо работали при спокойном море, но не могли выдержать те сильные волнения, которые иной раз создаются ветрами в поверхностном слое морей. Мощь волн иногда такова, что практически ей нельзя противостоять. Нужно было бы сначала проложить в твердой почве трубы для откачки воды с глубины и вывести их в воду настолько глубоко, чтобы воздействие волн не ощущалось. Но легко видеть, что такую установку осуществить трудно, и акционеры, которых соблазнило остроумие проекта, потеряли свои деньги.

31. Порядок и беспорядок. Заканчивая, отметим, что во многих случаях можно говорить не о вероятности состояния, а о порядке и беспорядке. Очевидно, что порядок менее вероятен, чем беспорядок, и если легко получить беспорядок, исходя из порядка, то вообще нужно немало усилий, чтобы из беспорядка создать порядок. Уголь и железная руда — это упорядоченные запасы, находящиеся в нашем распоряжении. Когда мы сжигаем уголь, мы его рассеиваем в беспорядке и только благодаря растениям мы можем снова упорядочить тот уголь, который находится в воздухе в виде углекислоты. Но железо, используемое для разнообразнейших нужд, чаще всего достаточно быстро рассеивается и теряется. Это же имеет место для большинства продуктов человеческой деятельности, которые обычно оказываются быстро утерянными. Недалек тот день, когда рассеяние естественных ресурсов заставит использовать новые источники энергии, например, приливы. Впрочем, все эти различные источники — космического происхождения (энергия Солнца или энергия вращения Земли). Но чтобы использовать такие источники даровой энергии, как приливы, нужно построить достаточно сложные аппараты и машины, для которых потребуется исходный материал, такой, как медь. Таким образом, проблема постепенного рассеяния таких материалов не будет снята с повестки дня.

Однако можно указать на то, что если эволюция видов в течение очень больших периодов привела к постепенному уменьшению их величины, то это может повлечь за собою уменьшение потребности в порядке для существования этих видов. Это значит, что можно получить ту же степень усложнения, несмотря на эволюцию к беспорядку. Так, часы малых размеров требуют, в конце концов, меньшей затраты труда, чем большие настенные часы. Но это уже такие соображения, которые не могут притязать на то, что дадут нам возможность предвидеть будущее Земли и, тем более, будущее вселенной [1]).

Итак, нашим выводом будет то, что вселенная эволюционирует от неоднородного к однородному, то есть от относительно упорядоченного состояния к состоянию все более и более беспорядочному. Но эта эволюция, при общем взгляде на нее, происходит чрезвычайно медленно.

---

[1]) См. последнюю главу моей книги «Случай».

Глава V

ТОЧКА ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКА

32. Неверные равенства. Анри Пуанкаре в своих глубоких изысканиях в области философии науки подчеркивал то обстоятельство, что с точки зрения математика ошибки не имеют градаций и что любое неверное равенство надо рассматривать как тягчайшим образом неверное, сколь бы мала ни была ошибка, ибо из него можно вывести любое другое неверное равенство.

Действительно, допустим, что мы неосторожно написали

$$a = b, \tag{1}$$

когда число a не равно строго b. Это сводится к записи

$$a - b = 0, \tag{2}$$

причем разность $a - b$ нулю не равна. А так как эта разность не нуль, то, каково бы ни было число A, можно найти такое число M, что

$$M(a - b) = A. \tag{3}$$

С другой стороны, мы имеем право помножить на M обе части равенства (2), которое предполагается верным, и это нам дает

$$M(a - b) = 0, \tag{4}$$

а сравнивая (3) и (4), получаем

$$A = 0. \tag{5}$$

Итак, соотношение (5), где A — любое число, есть необходимое следствие нашего отправного соотношения (1). Такова точка зрения, которая представляется обязательной для всякого математика. Для него нет градаций в ошибке, как нет для него чисел малых или больших, потому что все зависит от выбора единицы измерения. Миллиард для нас большое число, если имеем дело с годами или тоннами золота, но и это есть малое число, когда речь идет о молекулах водорода или даже о каплях воды в океане. Впрочем, в известной мере так же обстоит дело с отвлеченными числами, какими являются вероятности: вероятность в одну тысячную нам покажется ничтожной, если речь идет о небольшом риске, скажем, риске выйти без зонтика от дождя, но она была бы огромной, если бы нам сказали, что это каждодневная вероятность взрыва множества атомных бомб, помещенных неподалеку от нас.

Эти же примеры показывают, что все люди *на деле* сходятся на том, что некоторыми погрешностями можно пренебречь, то есть на том, что неравные числа можно рассматривать как равные. Тот, кто поставил бы себе задачу определить число кубических миллиметров воды, содержащихся в океанах, должен был бы себя поздравить, если бы допустил ошибку, не превышающую миллиарда; можно даже утверждать, что искомое число далеко не определено с такой точностью, потому что каждую секунду оно увеличивается благодаря притоку рек и уменьшается из-за испарения на такие величины, которые значительно больше этого миллиарда.

Однако математик вправе отвергнуть такой ответ, потому что некоторые могущие быть изученными им вероятности действительно определяются с очень большой точностью, и эти вероятности можно затем комбинировать так, чтобы получать как меньшие, так и бóльшие числа. Поэтому необходимо рассмотреть несколько примеров.

33. Десятичные вероятности. Мы назовем десятичными вероятности появления той или иной цифры некоторого числа (целого или дробного) [13], записанного в десятичной системе. Числа предполагаются записанными в виде десятичных дробей. Обратимся именно к этому случаю и рассмотрим десятичную дробь с десятью цифрами после запятой:

$$a = 0{,}3141592653.$$

Можно задать себе вопрос, какова вероятность точно получить это число a при последовательной выборке различных цифр, например, с помощью колес вроде тех, какими пользуются при случайной выборке выигрышных номеров какой-нибудь лотереи [1]). Поскольку вероятность получить для первой цифры цифру 3, для второй — цифру 1 и т. д. равна при каждой выборке одной десятой, то ясно, что вероятность p получить в точности число a равна десятой степени одной десятой, то есть одной десятимиллиардной. Достаточно взять число b, состоящее не из 10, а из 20 цифр, чтобы иметь вероятность p', равную квадрату предыдущей, то есть одной стомиллиардной от одной миллиардной.

Вероятности p и p' точно определены и хорошо известны. Обе они весьма мало отличны от нуля, но математик все же не должен их смешивать с нулем, как мог бы поступить физик, если бы получил эти числа как вероятные значения разницы в длине примерно метровых линеек, считая единицей длины метр.

Если бы мы могли повторять случайную выборку 10 миллиардов раз, то математическое ожидание того, что получится число a, было бы равно единице. Этим не хотят сказать, что число a было бы получено безусловно, а только то, что в среднем его получали бы по разу в каждой серии из такого числа выборок.

Согласно формуле Пуассона [14], при десяти миллиардах испытаний, каждое из которых состоит в выборке десяти цифр, есть 36,8% шанса не получить a, столько же шансов получить его один раз, вдвое меньше, 18,4% шанса, получить его два раза, втрое меньше — 6,1% шанса получить его трижды, и т. д. Если бы каждое испытание занимало секунду, число a в среднем получалось бы один раз примерно в 300 лет (точнее, в 317 лет).

34. Нормальные десятичные числа. Теперь предположим, что мы хотим определить бесконечное десятичное число, выбирая наудачу все его последовательные цифры. Ясно, что мы не можем произвести все эти выборки, но математик может представить себе, что их число сколь угодно велико, что в точности и представляет математическое определение бесконечного числа [2]). Мы знаем, что по закону больших

[1]) Можно опасаться, что колеса не идеальны и не обеспечивают равных шансов для всех цифр. Напомним, что, рассуждая, как в § 14, получим для каждой цифры вероятность, равную одной десятой, если сделаем случайную выборку достаточно большого числа цифр, вероятность каждой из которых близка к одной десятой, составим сумму этих цифр и возьмем цифру единиц этой суммы.

[2]) Действительно, говорят, что число бесконечно, если оно превышает любое заданное целое число. Это — потенциально бесконечное

чисел Бернулли частота каждой из десяти цифр стремится к предельному значению $^1/_{10}$, когда число выборок неограниченно возрастает. Очевидно, что то же самое верно для любого конечного числа последовательных цифр. Если взяты две цифры, например 35, вероятность получить их в этом порядке есть $^1/_{100}$ и, следовательно, частота сочетания 35 будет одна сотая. Точно так же частота сочетания 206 будет одна тысячная, а частота сочетания из десяти цифр числа a — будет одна десятимиллиардная. Отсюда заключаем, что если делать в секунду 10 выборок по одной цифре, то в среднем цифра три будет получаться каждую секунду, сочетание 35 — каждые 20 секунд, сочетание 206 — каждые 300 секунд, то есть каждые 5 минут, и, как мы знаем, сочетание a — каждые 300 лет.

Говорят, что десятичное число нормально, если предельная частота его цифр, равно как и сочетаний из произвольного числа последовательных цифр, следует тому же закону, что и для чисел, цифры которых выбраны случайно, то есть равна одной десятой для одной цифры, одной сотой — для сочетания двух цифр, одной тысячной — для сочетания трех цифр и т. д. [16].

Если стать на точку зрения теории меры точечных множеств, то приходим к заключению, что числа ненормальные образуют множество нулевой меры [17], тогда как мера множества нормальных десятичных чисел (между 0 и 1) равна единице. Следовательно, надо считать, что нормальных чисел бесконечно больше, чем чисел ненормальных. Впрочем, здесь не место развивать такие соображения. Но замечательно то, что исключительно трудно определить нормальное число, особенно если требовать, чтобы оно полностью имело характер числа, цифры которого выбраны случайно [1]). Это вызвано тем, что человеческому разуму трудно имитировать случай. Наоборот, нужно считать весьма вероятным, что все просто определяемые числа, за исключением чисел рациональных, нормальны. Так, например, обстоит дело с $\sqrt{2}$, с числами e и π, которые играют столь важную роль в математическом анализе, с синусами и

число, и только такое бесконечное число использовалось в математике, пока Г. Кантор не ввел бесконечное число (ω), которое предполагается реализованным (актуальным) [15].

[1]) Например, число, которое получим, выписывая после запятой последовательно все целые числа, начиная с единицы, не таково.

косинусами, аргумент которых выражается целым числом градусов или минут, или секунд (кроме весьма частных случаев, когда они рациональны). Строгое доказательство этого факта было бы одним из самых блестящих успехов, каких можно достичь в исследовании свойств чисел, но это доказательство, по-видимому, очень трудно.

Если все же математики вообще сходятся на том, что такой факт имеет место, то это происходит в силу принципа достаточного основания. Этот принцип имеет большое значение для нашей убежденности в равенстве определенных вероятностей (выпадения различных граней кости или игральных карт одной и той же колоды и т. п.) Действительно, не видно никаких оснований для того, чтобы определенная цифра десятичной системы была в особом положении по отношению к такому числу, как $\sqrt{2}$, e, π. Кроме того, некоторые из этих чисел вычислены с большим числом десятичных знаков (например, π — более чем с 800[1]), и тщательное рассмотрение полученных цифр подтверждает, что отклонения частот цифр от их среднего значения находятся в пределах, которые следовало бы ожидать при случайной выборке. Однако надо сознаться, что (ограничиваясь десятичной системой) нашему воображению трудно, если не невозможно, охватить все своеобразные следствия того обстоятельства, что число, такое как π или $\sqrt{2}$, является нормальным. Это связано с тем, что нам не легко отличить последовательность из нескольких сотен цифр от другой подобной же последовательности; для нас имеют свое лицо лишь крайне редкие последовательности, образованные, например, только из нулей или вообще только из одинаковых цифр или из двух правильно чередующихся цифр. В силу этого представляет интерес рассмотрение, наряду с десятичной нумерацией, того, что мы назовем алфавитной нумерацией.

35. Алфавитная нумерация. Можно условиться выбрать систему счисления с основанием 26, в которой 26 цифр изображаются 26-ю буквами французского алфавита. Пусть при этом буква *a* соответствует нулю, *b* — единице и т. д., *z* — двадцати пяти. Тогда всякий французский (или английский, испанский и др.) текст можно рассматривать как

---

[1]) Теперь известно уже более ста тысяч десятичных знаков числа π. (*Ред.*)

число при условии, что отбрасываются такие знаки как пунктуационные, промежутки между буквами, апострофы и знаки ударения. Если пожелать учесть и такие знаки, надо было бы выбрать систему счисления с основанием, превышающим 26, что нетрудно. Так, можно было бы принять все знаки пишущей машинки (где есть и прописные буквы, и десятичные цифры), прибавив к ним знаки для промежутка между словами и красной строки, что составит 84 знака. Но мы ограничимся 26.

Если допустить, что число π нормально в такой системе алфавитной нумерации, то отсюда следует, что всякое сочетание определенного количества знаков должно получаться при вычислении последовательных цифр (эти цифры мы называем десятичными в случае десятичной системы счисления) числа π в этой алфавитной системе счисления.

Рассмотрим сочетание n знаков.

Вероятность его получения равна частному от деления единицы на n-ю степень числа 26. Чтобы составить себе представление о ее величине, проведем простое вычисление, используя число 25 и то, что десятая степень двух, то есть 1024, приближенно равна 1000 — кубу десяти. Так как 25 есть квадрат пяти, то имеем

$$25^5 \cdot 2^{10} \doteq 10^{10},$$

следовательно, 25^5 примерно равно частному от деления 10^{10} на 10^3, то есть 10^7, а 25^{10} примерно равно 10^{14}. Таким образом, 26^{10} заключено между 10^{14} и 10^{15}. Отсюда заключаем, что знаменатель в выражении для вероятности определенной последовательности из 1000 букв (числитель равен 1) есть степень десяти с показателем, заключенным между 1400 и 1500, то есть число с 1400—1500 цифрами.

В следующей главе мы попробуем составить себе представление о столь больших числах. В данный же момент мы станем на точку зрения математиков, которые не усматривают никакой трудности в рассмотрении сколь угодно большого числа, лишь бы они его могли записать так, чтобы два математика, говоря о нем, были уверены, что они говорят об одном и том же [1]).

Таким образом, если мы рассматриваем последовательность в один миллион букв, что соответствует книге от 400

[1]) Некоторые математики идут даже дальше и полагают возможным рассматривать и недостаточно определенные числа.

до 500 страниц среднего формата, то вероятность обнаружить в ходе вычисления числа π в алфавитной системе именно эту последовательность в миллион букв равна частному от деления единицы на число, которое имело бы немногим больше чем 1 400 000 цифр.

Алфавитная нумерация более интересна для нас, чем нумерация десятичная, в силу того, что последовательность в миллион букв, составляющая книгу, имеет для нас свое лицо, и это позволяет сразу отличить ее от подобного же собрания знаков, образующего другую книгу. Даже не обладающий исключительной памятью человек может в конце концов выучить наизусть целый том, особенно если это том стихов, тогда как самые знаменитые специалисты по вычислениям в уме были бы далеки от того, чтобы быть в состоянии безошибочно запомнить миллион цифр или даже только сто тысяч цифр. Отсюда следует, что если, допустим, нам известно нормальное число в алфавитной системе счисления, то его свойства нам покажутся гораздо более странными, чем при десятичной системе.

36. Нормальное число в алфавитной нумерации. Мы уже указывали, каковы соображения, в силу которых можно быть уверенным, что число π есть нормальное число в десятичной системе. Эти соображения остаются в силе для любой другой системы счисления, в частности, для алфавитной [1]). Впрочем, если бы паче чаяния то, что изложено ниже, оказалось неприменимым к π, нам нужно было бы только взять вместо π любое иное нормальное число. Мы ведь знаем, что таких чисел бесконечно много, хотя точно указать какое-либо такое число и не легко.

Согласно предыдущему, есть конечная вероятность (равная единице, поделенной на число, имеющее около 1 400 000 цифр) того, что в алфавитном представлении числа π имеется некоторая определенная последовательность в миллион букв, образующая данную книгу. Хотя эта вероятность крайне мала, но поскольку разложение π следует мыслить неограниченным, ибо π не рационально, приходится допустить, что эта последовательность букв встретится не один раз, а даже бесконечное число раз.

Итак, если мы попытаемся представить себе это алфавитное разложение π в целом, то мы вынуждены признать,

[1]) Можно заметить, что это не обязательно для такого представления, как разложение в цепную дробь, в своем роде единственное.

даже без перехода к бесконечности, что оно содержит все книги, написанные по-французски или на любом другом языке с тем же алфавитом.

Само собой разумеется, что в этом разложении будут содержаться тексты всех газет, опубликованных на этих языках, как, впрочем, и тексты всех газет, которые будут опубликованы завтра или в будущем столетии. Между всеми этими текстами, конечно, будут находиться бесчисленные последовательности букв, совершенно лишенные смысла. Но такие последовательности не будут бесконечными и между ними будут слова, фразы и, гораздо реже, более длинные тексты, имеющие смысл.

Было уже показано на примерах, в какой мере наше воображение неспособно на деле представить себе ту непрерывную бесконечность точек, которую математики помещают на отрезке прямой [1]. Но здесь нет нужды переходить к бесконечности. Достаточно взять достаточно большое конечное число, например, число N с тысячью миллиардов цифр, чтобы быть уверенным, что, выписав N первых цифр π в алфавитной системе, мы найдем при этом где-либо один за другим тексты всех книг библиотеки в 300 000 томов.

Таково несравненное богатство, заключенное в числе, которое мы обозначаем одной буквой π. Мы знаем простые методы для вычисления его первых знаков то ли в десятичной, то ли в алфавитной системе, а реальные успехи в области вычислительных машин, быть может, вскоре позволят вычислять тысячи его знаков, цифровых или буквенных [2]. Однако ясно, что это еще далеко до того огромного числа знаков, которое необходимо, чтобы увидеть свершившимся то, что можно было бы назвать чудом математиков. Впрочем, мы сейчас увидим, что даже если бы это чудо осуществилось, оно оказалось бы менее интересным, чем это склонны считать.

37. Иллюзии математика. Действительно, в приведенных нами результатах есть немало обманчивого, даже если отвлечься от того, какие громадные сроки нужны для их осуществления. Мы сказали, что можно было бы получить полный и точный текст данной книги, например *«Сида»*

---

[1] См., например, É. Borel, Eléments de la théorie des ensembles.

[2] Именно таким образом были вычислены тысячи знаков чисел π и e в последние годы. (*Ред.*)

Корнеля. Но не надо забывать, что столь же часто, как и эта книга, нам будет попадаться ее текст, но с опущением одной-единственной буквы или с заменой одной буквы другой, или с перестановкой двух букв. Точно так же можно было бы допустить, что изменены 2, 3, 4,... буквы или целый стих, или даже несколько стихов, последовательно или в разбивку, или изменена даже целая сцена или один из актов.

Подобно этому мы нашли бы, как было сказано, тексты всех газет, помеченных завтрашней датой, которые появятся в Париже, Лондоне, Нью-Йорке или Буэнос-Айресе; но мы найдем также аналогичные тексты с той же датировкой, но несколько отличающиеся от предыдущих, либо с большими отличиями и с сообщениями как правдоподобными, так и нелепыми и неправдоподобными, вроде того, что на Женевском озере произошло сражение между русским и мексиканским флотами и т. п.

Таким образом, если даже мы вообразим себе сверхчеловека, по сравнению с которым самый образованный человек был бы таков, каков по сравнению с ним малограмотный, едва умеющий подписать свою фамилию, и даже если мы в тысячи раз усилим это допущение, так что наше сверхсущество сможет охватить целиком алфавитное представление настолько, что найдет в нем «*Сида*», то оно найдет заодно столько других разных и странных текстов, что ему легче было бы самому создать произведения, не уступающие шедеврам, чем выделить шедевры из огромного числа нелепых или посредственных текстов. Так же обстояло бы дело, если бы это существо занялось новостями, содержащимися в завтрашних газетах: только то предвидение близкого будущего, которым оно располагало бы, могло бы дать ему некоторые шансы на то, чтобы извлечь весьма редкие точные сообщения из бесчисленного множества сообщений ложных или нелепых.

Впрочем, достаточно лишь немного поразмыслить, и мы отдадим себе отчет в том, что исчезни текст «*Сида*» во всех его печатных изданиях, самым неудачным средством для точного восстановления текста была бы случайная выборка алфавитных знаков до тех пор, пока это не будет достигнуто. Допустим даже, что сверхчеловеческое существо могло бы осуществить такую выборку,— оно получило бы при этом огромное множество текстов более или менее сходных с «*Сидом*» и, чтобы выбрать настоящий, должно было бы использовать свою память или память своих современников. Было бы проще с этого начать.

Надо ли сделать отсюда вывод, что полученные нами результаты лишены значения? Ничуть, но их значение с практической точки зрения равно нулю. Их значение было бы достаточно велико с точки зрения математической, если бы они указывали путь к исследованию поведения на бесконечности тех выражений, которыми определяется то или иное иррациональное число. Я уже не раз указывал на тот интерес, который представляют такие изыскания, но мне ясно, что они трудны, и я должен сознаться, что не вижу средств для преодоления этих трудностей.

Как мне кажется, из этих рассуждений можно извлечь вывод, что в том с виду весьма отчетливом представлении, которое составили себе математики относительно неограниченной последовательности целых чисел, есть немало иллюзорного. Вслед за каждым целым числом имеется другое, и операция перехода от числа n к $n+1$ кажется нам сначала одной и той же, каково бы ни было n, но ведь надо, чтобы мы могли представить себе это число n. Самые большие числа, какие мы можем считать определенными,— это те, которые в алфавитной системе счисления представляют книги наших библиотек,— книги, которые нам позволительно, если их не слишком много, считать расположенными одна за другой в определенном порядке. Но для нас абсолютно невозможно выявить какое-либо свойство чисел, определенных таким образом.

Разумеется, можно определить и значительно бо́льшие числа, но это будут числа «изолированные», особым образом определенные. Например, обозначим через a_1 десятую степень десяти, затем обозначим через a_2 a_1-ю степень десяти, через a_3 a_2-ю степень десяти и т. д., кончая таким a, индексом которого будет a_1 и которое обозначим через b_1; затем можно определить такое a, что его индекс равен b_1, и так далее. Но, повторяем, числа, определенные по такому способу, который может быть и видоизменен различным образом,— это числа исключительно редкие, тогда как числа, определенные в алфавитной системе последовательностями напечатанных слов, весьма сходны с наиболее общими числами, — такими, что их можно получить случайной выборкой последовательных цифр.

Глава VI

БОЛЬШИЕ ЧИСЛА И ВСЕЛЕННАЯ

38. Астрономические числа. В повседневной речи большие числа называют астрономическими, потому что помимо математиков, которым, как мы только что видели, не составляет труда выписывать весьма большие числа, именно астрономы пользуются такими числами при определении межзвездных расстояний, массы Солнца, размеров вселенной. Мы намереваемся оценить порядок величины этих астрономических чисел относительно единицы длины в системе CGS, то есть сантиметра.

Расстояния до звезд обычно определяются по времени, за которое их проходит свет, а скорость света (в пустоте) равна 300 000 километров в секунду или 30 миллиардам сантиметров, то есть $3 \cdot 10^{10}$ *см* в секунду. Время, необходимое для света, чтобы дойти от Земли до Солнца, несколько больше восьми минут, и мы его примем равным 500 секундам, так как во всей этой главе мы будем упрощать подсчеты, пользуясь приближенными числами, поскольку для нас важен только порядок величины результатов.

Итак, расстояние от Земли до Солнца в сантиметрах равно произведению 500 на $3 \cdot 10^{10}$, то есть составляет $1{,}5 \times \times 10^{13}$. Наиболее удаленная от Солнца планета Плутон дальше от него, чем Земля, примерно в 40 раз, что дает для ее расстояния от Солнца $6 \cdot 10^{14}$, а для объема шара S с центром в Солнце, содержащего внутри себя всю солнечную систему, около $1000 \cdot 10^{42}$, то есть 10^{45} (*куб. см*). Так как масса Солнца равна примерно $2 \cdot 10^{36}$ граммов, то если бы она была равномерно распределена в таком шаре S (массами планет по сравнению с массой Солнца можно пренебречь), средняя плотность составляла бы $2 \cdot 10^{36-45} = 2 \cdot 10^{-9}$ (граммов на *куб. см*). Свет Солнца затрачивает около трех лет, чтобы достичь ближайшей к нему звезды (α Центавра). Это соответствует примерно 10^8 секунд (свыше 1000 суток и менее чем 100 000 секунд в сутках), стало быть, расстоянию в $3 \times$

$\times 10^{18}$. Объем шара S' с центром в Солнце и с радиусом, равным этому расстоянию, составляет около $100 \cdot 10^{54} = 10^{56}$ и, следовательно, если бы масса солнечной системы была равномерно распределена в таком шаре, плотность была бы около $2 \cdot 10^{-20}$.

Если предположить, что средняя плотность звезд нашей Галактики почти равна плотности вблизи Солнца и что средняя масса этих звезд того же порядка величины, что и масса Солнца, то вычисленная только что плотность дает достаточно точное представление о порядке величины средней плотности материи в нашей Галактике. Это значит, что показатель 20 верен с точностью до нескольких единиц в ту или другую сторону.

Если оценить наибольший поперечник нашей Галактики в 100 000 000 световых лет [18], то он не более чем в 10^8 раз превышает радиус шара S', и порядок величины этой длины не превысит 10^{27}, куб же этого числа есть 10^{81}. Самые отдаленные спиральные туманности, какие удается наблюдать — это галактики, расстояние которых от Земли не больше трех миллиардов световых лет, то есть 10^{28} *см*, а куб этого числа есть 10^{84}.

Таковы наибольшие астрономические числа, которые получаются при измерении известной вселенной в единицах CGS.

39. Астрономические сроки. При вычислении промежутков времени, которые необходимы для прошлого и будущего развития нашей солнечной системы, мы будем получать значительно меньшие числа.

В начале нашего столетия геологи и астрономы вступили в спор по вопросу о возрасте Земли. Сроки, которые казались геологам необходимыми для того, чтобы объяснить формирование земных отложений, превышали промежутки, которые, согласно астрономам, отделяют от нас те времена, когда земной шар охладился настолько, что стало возможным образование океанов и появление жизни.

Этот спор возник из-за того, что по подсчетам астрономов светило типа Солнца не может излучать свет в течение продолжительного времени. Но после открытия радиоактивности и того факта, что при превращениях материи высвобождается огромная энергия, выяснилось, что для эволюции светил можно указать значительно бо́льшие сроки, чем это казалось раньше. Теперь геологи и астрономы сходятся на том, что со времени охлаждения земного шара прошло около миллиарда лет, а возможная в будущем продолжительность жизни на Земле есть величина того же порядка.

Чтобы гарантировать себя от ошибок, неизбежных в рассуждениях такого рода, мы могли бы допустить даже сотни миллиардов лет [1]), что дало бы около тысячи миллиардов раз по десять миллионов секунд, то есть 10^{22} секунд. Таково наибольшее из астрономических чисел в оценках сроков, если ограничиться нашим шаром, что для нас особенно интересно. Быть может, хотя это представляется все менее и менее вероятным, это число следует умножить на миллион или миллиард при учете возможностей эволюции всего наблюдаемого нами звездного мира. Но и при этом нам не удастся превысить 10^{30} секунд.

40. Экскурсия в бесконечно малое. Уже давно замечено, что хотя бесконечно малое кажется нам более доступным, чем бесконечно большое, его сравнительно труднее измерить и постичь.

Молекулы и атомы, из которых состоят химически простые и сложные тела, долгое время считались недоступными, их существование было только чистым предположением. Однако в конце прошлого и в начале настоящего века удалось их измерить различными, но согласующимися методами, а важные экспериментальные работы (среди которых одно из первых мест надо отвести работам Ж. Перрэна) доказали реальность атомов и молекул и сделали их доступными наблюдению и опыту.

Порядок величины массы молекул по отношению к грамму около 10^{-22}. Если принять его равным 10^{-24}, корень кубический из этого числа будет 10^{-8}, и это дает нам представление о порядке величины линейных размеров атома или молекулы. Но в течение последних двадцати лет физики ушли значительно дальше в познании материи, смогли проникнуть в атом и представить себе его строение (Нильс Бор). Узнали также о частицах значительно меньших, чем атомы (протоны, негатоны, позитроны, мезоны). Эти новые теории тесно связаны с теорией квантов и волновой меха-

[1]) Впрочем, согласно последним работам, возраст нашей Солнечной системы, по-видимому, меньше пяти миллиардов лет. (Теперь, в шестидесятые годы нашего столетия, возраст Солнечной системы принимается большим примерно вдвое, чем указанная Борелем величина.— *Ред.*)

никой (Планк, Шредингер, Луи де Бройль). Наименьшие полученные при этом массы имеют порядок 10^{-28}.

Все эти теории находятся в процессе развития и, без сомнения, еще не сказали своего последнего слова. Поэтому будет благоразумно принять большой «запас прочности» в оценках того, как малы будут по сравнению с размерами атома те размеры, с которыми придется иметь дело в будущем. По-видимому, множитель порядка тысячи миллиардов, то есть 10^{12}, является достаточным для такой цели, по крайней мере пока будут читать эту книгу. Мы получаем таким образом линейные размеры порядка 10^{-20}, что дает для объемов или масс 10^{-60} (в действительности массы больше, т. к. плотности самых малых частиц весьма велики).

Если сопоставим результаты, полученные в бесконечно малом, с тем, что мы получили в бесконечно большом, то мы увидим, что для оценки размеров вселенной с помощью наименьшей возможной инфрамолекулярной шкалы достаточно чисел меньших, чем 10^{50} для линейных размеров и, стало быть, меньших, чем 10^{150} — для объемов.

41. Самые короткие сроки. Для наибольших промежутков времени в системе единиц CGS мы получили числа, приблизительно равные тем, которыми выражаются в той же системе наибольшие расстояния. Примерно таково же соотношение между самыми малыми промежутками времени и самыми малыми длинами. Такими самыми короткими промежутками являются, с одной стороны, периоды световых колебаний, с другой,— интервалы между двумя последовательными столкновениями одной и той же молекулы. И здесь мы можем принять определенный запас, чтобы учесть как прогресс наших средств исследования, так и развитие физических теорий. Так мы получаем в качестве наименьшего промежутка времени, какой приходится рассматривать, 10^{-20} секунды. Самый большой промежуток, с которым нам довелось иметь дело, составлял 10^{30} секунд, так что отношение его к наименьшему промежутку равно 10^{50}, и это как раз то отношение, которое получилось у нас между наибольшим и наименьшим линейным размером.

Помножив отношение промежутков времени на отношение объемов, то есть 10^{50} на 10^{150}, мы получим 10^{200} в качестве максимального числа элементарных событий, могущих произойти во всей вселенной,— событий, локализованных в минимальном возможном объеме и во времени происходящих в кратчайшие сроки. В последней главе мы обсудим те проблемы, которые возникают в связи с рассмотрением сложных событий. Здесь мы ограничимся замечанием, что даже считая наши оценки весьма большого и весьма малого чересчур робкими, не легко будет заменить 10^{200} на 10^{300}. Отсюда заключаем, что это ничуть не затронет наших выводов, если речь идет о сравнении этих чисел со степенями числа 10, когда их показатели достигают миллионов или миллиардов, как у нас получалось в предыдущих главах. Теперь же мы попробуем показать, как можно было бы пытаться получить столь большие числа в построениях, основанных на возможности бесконечной вселенной.

42. Вселенная конечная или бесконечная. Известно, что теория относительности позволила поставить вопрос о том, конечна или бесконечна вселенная, в точной формулировке. А именно, кривизна вселенной в определенной области была получена в виде простой функции от средней плотности массы материи в этой области, и если эта кривизна больше фиксированного числа, сколь бы мало оно ни было, то отсюда с неизбежностью следует, что вселенная конечна, и что линии, которые мы называем прямыми — траектории лучей света — в действительности окружности очень большого радиуса. Двигаясь по ним, мы возвращаемся к исходной точке, как это проделывало бы крохотное животное, если бы оно каждый год продвигалось по земному меридиану на долю миллиметра. Но такому животному нужно было бы жить миллиарды лет, чтобы обойти таким образом Землю, так что оно не было бы под угрозой заметить это движение по замкнутой траектории, как не заметили бы этого и его потомки, даже если бы их сведения и наблюдения передавались от поколения к поколению.

Но хотя теория относительности приводит к выводу, что гипотеза конечности вселенной является вероятной, эта теория не позволяет целиком отбросить гипотезу, что вселенная бесконечна. Только в последнем случае следует допустить, что если мы рассматриваем шар с центром в какой-то точке и с неограниченно растущим радиусом, то средняя плотность материи внутри такого шара стремится к нулю.

Впрочем, уже давно было указано на то, что если в бесконечной вселенной средняя плотность звезд постоянна, то небо должно было бы нам казаться столь же светлым, как солнечный диск, по крайней мере, если допустить, что межзвездные пространства пусты и не поглощают света. Если же эти пространства не пусты, мы сталкиваемся с другими трудностями.

Итак, попытаемся представить себе эту вселенную, в которой средняя плотность материи равна нулю. Нам известна наша Галактика, то есть скопление звезд, образующих Млечный Путь, причем ближайшие к нам звезды рассеяны по всем направлениям. Средняя плотность этой Галактики примерно такая, какую мы вычислили в § 39, то есть 10^{-20}. Можно допустить, что такова же средняя плотность и других галактик, которые мы наблюдаем в виде спиральных туманностей. Но для того, чтобы средняя плотность уменьшалась внутри сферы все большего и большего радиуса, надо допустить, что общий объем всех этих галактик внутри этой сферы весьма мал по сравнению с объемом разделяющих их пустот. Иными словами, если размеры галактик выражаются сотнями миллионов световых лет, то разделяющие их промежутки выражаются по меньшей мере миллиардами.

Мы подходим здесь к крайним пределам того, что может достичь наша наука, и дальше можно двигаться, только опираясь на аналогии и нагромождая предположения. И все-таки для нас это единственное средство, чтобы превзойти те астрономические числа, которые мы смогли получить, то есть 10^{200}.

43. Числа сверхастрономические. Итак, допустим, что галактики, подобные нашей и которые мы назовем галактиками первого порядка, столь же многочисленны, как и звезды, образующие нашу Галактику, и что сами они составляют то, что мы будем называть галактикой второго порядка [1]. Мы видели, что звезды, образующие нашу Галактику, отделены одна от другой при наибольшей близости несколькими световыми годами, при наибольшем удалении — десятками миллионов световых лет. По нашему допущению в галактике второго порядка самые близкие друг к другу галактики первого порядка находятся на расстояниях в несколько миллионов световых лет. Таким образом, для

[1] Во всем этом параграфе и в следующем мы стремимся к возможно большей общности и не принимаем во внимание те конкретные результаты, которые приводят к теории расширяющейся вселенной, о чем мы скажем вкратце под конец.

расстояний между ними приходится принять миллионы миллионов световых лет, что указывает размеры галактики второго порядка. Следовательно, линейные размеры такой галактики второго порядка примерно в 10^7 раз больше размеров нашей Галактики, стало быть, ее объем больше объема галактики первого порядка примерно в 10^{20} раз.

Теперь нам надо представить себе другие галактики второго порядка, чьи взаимные расстояния должны быть по меньшей мере в 10 раз больше их максимальных размеров, и так далее. С каждым новым нашим шагом объем галактики умножается примерно на 10^{20}, так что он умножится на $10^{20\,000}$, когда мы дойдем до галактики тысячного порядка.

Разумеется, математик не обязан остановиться на этом, он может брать сколь угодно большие порядки галактик, поскольку он располагает неограниченной последовательностью целых чисел. Однако пора задать себе вопрос, могут ли эти рассуждения соответствовать чему-то для нас реальному.

44. Сверхгалактики. Действительно, мы только что видели, что размеры галактики некоторого порядка примерно в 10 миллионов раз больше размеров галактики порядка непосредственно предшествующего. Это почти такое же отношение, в каком находятся размеры земного шара и капли воды. Если мы представим себе, что капля воды населена разумными, как и мы, существами, но настолько же малыми, по сравнению с этой каплей, насколько мы малы по сравнению с Землей, то станем ли мы рассматривать как возможное и правдоподобное то, что эти обитатели капли воды составили себе достаточно точное представление о разнообразии минералов, растений, животных на поверхности Земли, не говоря уже о внутренности нашей планеты, о которой мы сами мало что знаем? И каковы должны быть наши выводы, если предположить, что операция перехода от галактики к галактике высшего порядка повторяется тысячу раз?

Как уже сказано, наши допущения о соотношениях между галактиками различных порядков вполне произвольны, ибо они основаны только на грубых аналогиях. Но надо отдавать себе отчет в том, что в наших выводах ничто не изменилось бы и при том или ином видоизменении этих допущений. Действительно, надо отбросить как абсурдное то допущение, что плотность числа звезд нарастает по мере удаления от Земли; даже если считать эту плотность близкой к постоянной, мы сталкиваемся с непреодолимыми трудностями. Но даже выводы теории относительности о конечности вселенной не изменят наших выводов.

Задолго до достижения чисел порядка величины 10^{1000} (относительно самых малых вообразимых длин и сроков) мы оказываемся в океане неизвестного, потому что нет никаких оснований для того, чтобы вселенная на таких удалениях, если они существуют, была бы в какой-то мере подобна нашему миру: от него она может отличаться качественно и количественно больше, чем земной шар от капли воды или от песчинки.

Поэтому не только невообразимо, но и абсурдно допущение, что опыт, подобный опыту с дактилографирующими обезьянами [19] или опыту Джинса, можно повторять 10^{1000} раз.

Наконец, приведем любопытное следствие теории расширяющейся вселенной: часть вселенной, которая нам доступна зрительно, конечна, потому что расположенные за нею части удаляются от нас со скоростями, превышающими скорость света, и никакой сигнал оттуда никогда не сможет попасть к нам. Следовательно, если исходить из наших сведений, все происходит так, как если бы вселенная была конечной, а ее размеры едва превышали бы миллиард световых лет.

В главе IX мы попробуем уточнить те выводы относительно понятий достоверности и вероятности, которые можно извлечь из этих замечаний. В ближайших двух главах мы будем изучать простые задачи, в связи с которыми в теорию вероятностей проникли понятия бесконечности и непрерывности.

Глава VII

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПАРАДОКС

45. Формулировка парадокса. В XVIII веке наиболее выдающиеся французские вероятностники в переписке между Петербургом и Парижем сформулировали и подвергли углубленному изучению задачу, за которой закрепилось название «Петербургский парадокс».

Петр и Павел уговариваются сыграть ряд партий в орла и решку или в подобную же игру, в которой шансы обоих партнеров равны, на следующих условиях.

Если Петр выиграет первую партию, Павел выплачивает ему два франка и на этом игра прекращается. Если Петр проигрывает первую партию и выигрывает вторую, Павел выплачивает ему четыре франка и игра прекращается, ...; если Петр проигрывает $n-1$ первых партий и выигрывает n-ю, Павел выплачивает ему 2^n франков и игра прекращается. Задача состоит в том, чтобы определить, какова должна быть ставка Петра, то есть та сумма, которую он до начала игры должен выплатить Павлу в виде возмещения за взятые тем на себя обязательства.

Парадоксальным результатом является то, что эта ставка должна быть бесконечно большой, а это означает, что сколь бы ни была велика ставка Петра, игра для него выгодна, то есть Петр может до начала игры продать свои права за бо́льшую цену.

То вычисление, которое приводит к такому результату, весьма просто и кажется неуязвимым. Дело сводится к вычислению полного математического ожидания для Петра. Это полное математическое ожидание, очевидно, есть сумма математических ожиданий для каждой из возможностей, влекущих за собою выигрыш Петра,— ведь Петр, действительно, мог бы продать по отдельности различным покупателям каждое из этих математических ожиданий.

Итак, рассмотрим тот случай, когда Петр выигрывает n-ю партию после проигрыша им $n-1$ первых. Вероятность такого события равна $1/2^n$; действительно, такова вероятность того, что n партий будут выиграны, каждая тем или иным из игроков, в определенном заранее указанном порядке. По условиям игры в этом случае выигрыш Петра равен 2^n, стало быть, математическое ожидание для Петра (произведение такой вероятности на величину возможного выигрыша) равно единице.

Такова та цена, за которую Петр мог бы продать покупателю, согласному заключить справедливую сделку, свои шансы на выигрыш n-й партии после проигрыша всех предыдущих. А так как это рассуждение верно для любого значения n, то полное математическое ожидание для Петра равно сумме бесконечного ряда, все члены которого равны единице, стало быть, оно бесконечно.

Тем не менее, надо думать, что ни один здравомыслящий и имеющий некоторый опыт в игре человек не согласился бы на месте Петра поставить и 100 франков против обязательств Павла (считаю, что единицей выбран франк). В этом и состоит «петербургский парадокс».

Среди теорий, вызванных этим парадоксом, одной из наиболее любопытных является теория морального ожидания, ныне оставленная, однако имеющая некоторые бесспорные психологические основания. Она исходит из замечания, что действительная выгода выигрыша для того или иного лица не пропорциональна этому выигрышу, а зависит от отношения выигрыша к состоянию выигравшего.

Например, тот, кто, обладая тысячью франков, выигрывает миллион, столь же рад этой удаче, как и тот, кто, обладая миллионом, выиграл бы миллиард. Но с полным основанием рассудили, что, каково бы ни было психологическое значение этого соображения, его нельзя учитывать при оценке математического ожидания, так как последнее имеет ценность как товар и может быть продано любому. Поэтому при установлении его цены нельзя исходить из того, каково состояние продавца или покупателя.

Можно занять другую позицию по отношению к петербургскому парадоксу — отрицать наличие парадокса и объявить корректным результат, полученный безупречным рассуждением.

Такую позицию занял Жозеф Бертран [1]: он утверждает, что, какова бы ни была ставка Петра, тот может быть

[1] Ж. Бертран (1822—1900) — выдающийся французский математик, работавший во многих областях науки; его Calcul des probabilités (Исчисление вероятностей) издан в 1888 г. (*Ред.*)

уверен, что в конце концов он разбогатеет и разорит Павла. Разумеется, для этого требуется, чтобы от Петра в случае проигрыша не требовали уплаты наличными,— его надо кредитовать, и он, быть может, задолжает астрономическую сумму, превышающую стоимость массы золота объемом в Землю; но если у него хватит терпения, если он будет жить достаточно долго, либо если он завещает эту игру своим наследникам, то подсчет сулит ему обогащение, а подсчет никогда не подводит.

Мы сейчас уточним выводы из утверждений Жозефа Бертрана, и это позволит нам объяснить парадокс и опровергнуть сделанные из него выводы.

46. Объяснение парадокса. Как уже сказано, бесконечное значение, приписываемое математическому ожиданию для Петра, получается как сумма бесконечного числа слагаемых, равных единице, а каждое слагаемое является математическим ожиданием, которое могло бы быть предметом отдельной сделки, то есть быть проданным возможному покупателю за один франк. Так вот, мы покажем, что если Петр может надеяться на то, что покупателей на первые члены ряда легко будет найти, то на следующие члены ряда найти их будет сначала трудно, а затем невозможно.

Рассмотрим прежде случай явной невозможности, для чего достаточно взять n равным 1000. Мы знаем, что

$$2^{10} > 10^3,$$

откуда получаем, что

$$2^{1000} > 10^{300}.$$

Итак, Петр располагает определенной вероятностью выиграть сумму, равную 10^{300}, и эта вероятность равна 10^{-300}, так что математическое ожидание как раз равно единице. Но можно ли пустить это математическое ожидание в оборот? Как следует из вычислений предыдущей главы, сумма выигрыша оценивается стоимостью массы золота в объеме, значительно превышающем объем шара с центром в Солнце и радиусом, равным расстоянию от Солнца до ближайшей звезды. С другой стороны, чтобы иметь заметные шансы на получение такого выигрыша, надо было бы возобновлять игру каждую секунду в течение миллиардов веков в каждом из кубических сантиметров нашей вселенной. Предложение Бертрана уменьшить ставку и играть не на франк, а на молекулу водорода, уменьшит всего лишь на несколько единиц показатель степени 300 и ничего не изменит в наших выводах.

Рассказывают, что игроки, тщательно следившие, в тщетной надежде победить случай, за появлением черного и красного в рулетке, ни разу не отметили серии одного цвета, превышавшей 23 или 24 выхода. Ни один из этих искушенных игроков не согласился бы купить у Петра его шансы, соответствующие 30-му члену ряда — шансы, состоящие в обязательстве Павла выплатить миллиард рублей, если произойдет событие, вероятность которого близка к одной миллиардной (так как 30-я степень числа 2 несколько больше 9-й степени числа 10). Это событие состоит в последовательности 29 выпадений решки, за которой следует выпадение орла, и оно как раз столь же невероятно, как выпадение решки 30 раз кряду.

Итак, мы приходим к выводу, что хотя математическое ожидание для Петра равно сумме бесконечного ряда, все члены которого равны единице, в действительности только первые члены этого ряда могут быть предметом сделки, ценность же следующих членов быстро становится строго равной нулю, так как они представляют совершенно иллюзорное математическое ожидание получения суммы столь огромной, что ее нельзя было бы выплатить.

Таково весьма простое разрешение петербургского парадокса. Мы постараемся уточнить его в следующей главе, где будет затронут вопрос о возможно более точном определении того предела, начиная с которого членами ряда надо действительно пренебречь.

Мы отсылаем также к заметке в конце книги: «Петербургская игра на квит», в которой рассматриваются некоторые свойства математического ожидания, имеющие отношение к этому парадоксу.

Глава VIII

СОФИЗМ КУЧИ ЗЕРНА

47. Софизм древних. В предыдущих главах мы сознательно оставляли в стороне вопрос о точном определении такого значения вероятности, которое можно считать пренебрежимым. Этот вопрос в действительности связан со знаменитым софизмом кучи зерна, который дошел до нас от древних греков.

Одно зерно не составляет кучи, не составляют ее и два зерна, и три, ... С другой стороны, каждый согласится с заявлением, что сто миллионов зерен образует кучу. Какова же точная грань? Можно ли допустить, что 325 647 зерен не образуют кучи, тогда как 325 648 зерен ее образуют?

Однако, если нельзя установить грань, то невозможно понять, что значит куча зерна, и эти слова лишены всякого смысла, хотя, вместе с тем, в определенных случаях они не вызывают никаких разногласий.

Можно было бы заявить, что поставленный вопрос есть вопрос словоупотребления и его следует считать праздным и неинтересным. Можно было бы предложить различать с помощью подходящих прилагательных маленькую кучу от кучи ничтожной, или от кучи большой и кучи огромной. Но так как число таких прилагательных ограничено, это означало бы только отодвинуть, но не устранить трудность.

В ближайших параграфах мы займемся аналогичными вопросами, поставленными в связи с реальными задачами, которые отнюдь не являются лишь вопросами словоупотребления; однако те несколько замечаний, которые мы сделаем по поводу софизма древних греков, будут небесполезны для разъяснения этих новых трудностей.

И действительно, мы увидим, что хотя софизм кучи зерна выглядит несерьезным, в действительности он, подобно другим софизмам, завещанным нам древнегреческими философами, ставит важные и всегда актуальные проблемы.

Сначала мы избавимся от лишних трудностей. Вид кучи зерна зависит не только от количества зерен, которого на глаз мы не можем определить; он зависит также от объема и среднего веса зерен, разных для разных местностей и лет сбора. Следовательно, ставится вопрос, как узнать, заслуживает ли такое-то скопление зерен названия кучи или нет. Так как речь идет о названии, то решать должен обычай, то есть среднее мнение тех, кто говорит на данном языке, скажем, по-французски.

Итак, первое решение состояло бы в том, чтобы опросить если не всех взрослых, говорящих по-французски, то хотя бы достаточно большое их число, дабы процент ответов дал достаточно точное представление о проценте, который был бы получен при более широком опросе [1]). Если такой процент был бы равен, скажем, 65% за то, что данное скопление зерен есть куча, и 35% за то, что это не куча, можно было бы договориться о следующем: вероятность того, что мы имеем кучу зерна, равна 0,65, вероятность противоположного — 0,35. Естественно, что вероятность положительного заключения будет расти с ростом числа и веса зерен. Когда она достигнет единицы, мы будем уверены, что для всех, знающих французский язык, мы должны употребить выражение *куча зерна*.

Такое решение, которое я указал в упомянутой в примечании книге, мне кажется, вызывает возражения. Действительно, можно полагать, что для установления правильности речи нужно не единогласие, а только достаточное большинство. Например, если 95% всех опрошенных лиц будут за то, чтобы использовать выражение куча зерна, то естественно считать, что они правы,— в том смысле, что они достаточно многочисленны для выявления словоупотребления наиболее распространенного, которое должно иметь силу закона. Остающихся 5% надо будет призвать к исправлению их способа выражения, как не соответствующего правилам речи. Разумеется, с выбором коэффициента 95% обязательно связана некоторая неопределенность, так что мы, в другом виде, снова встречаемся с тем софизмом, которого мы хотели избежать. Поэтому решение, на котором мы остановимся, будет состоять в следующем. Считаем вероятность того, что наше выражение подходит, равной 50%,

---

[1]) См. § 19; по поводу софизма кучи зерна см. также мою книгу «Случай».

если процент благоприятных ответов тоже равен 50; однако с ростом благоприятных ответов эта вероятность растет быстрее, так что она достигает единицы, например, тогда, когда процент благоприятных ответов достигает 90. Поскольку дело идет о словоупотреблении, этот последний уровень мог бы быть установлен произвольно авторитетной организацией, то ли правительственной, то ли академической, обладающей правом кодифицировать язык. При этом мы также сразу затрагиваем административное решение (§ 48) и сходные вопросы, возникающие по поводу ошибок наблюдения (§ 50).

Итак, ограничимся отсылкой к этим параграфам и замечанием, что введение вероятности, которое можно рассматривать как законодательный ответ на поставленный вопрос, имеет хотя бы то преимущество, что устраняет крайне разительное отсутствие непрерывности в формулировке, данной древними. Действительно, согласно их постановке вопроса необходимо решить, что мы не имеем кучи до, скажем, 97 345 зерен включительно, но куча налицо, начиная с 97 346 зерен. Очевидно, нас будет меньше шокировать заявление, что в первом случае вероятность того, что имеем кучу, есть 0,49999, тогда как во втором случае она равна 0,50001. Впрочем, надо добавить, что практически нам столь же трудно отличить друг от друга эти две вероятности, как и найти точное число зерен.

48. Административное решение. Представляется полезным сказать несколько слов о решении административном, то есть о правилах, с помощью которых принятием произвольного решения стараются преодолеть практические затруднения, возникающие в силу рассматриваемого софизма при применении некоторых налоговых или других законов. Например, законом может быть установлено, что автомашина считается полугрузовой, с точки зрения государственной казны или правил товарооборота, если ее вес не превосходит 2000 кило, а при превышении такого веса — это уже грузовик. Но мы не настаиваем на этом примере, к которому, впрочем, применимо большинство замечаний, которые сейчас будут сделаны.

Известный в свое время юморист довольно забавно описывал те затруднения, которые может создать правило, что ребенка, начиная с трехлетнего возраста, нельзя везти бесплатно по железной дороге, а нужно уплатить за него половину тарифа. В юмореске был изображен дотошный папаша, едущий в поезде со своим сыном и включающий сигнал экстренной остановки в тот момент, когда его ребенку исполняется три года. Прибежавшему после остановки поезда проводнику отец заявляет: я использовал единственный способ, чтобы точно расплатиться, потому что я должен оплатить полбилета за те километры, которые нам осталось проехать.

История на этом заканчивалась, но каждый может представить себе соответствующую развязку, включая появление врача-психиатра с заданием выяснить, в здравом ли уме этот отец семейства.

Этот вымышленный рассказ все же привлекает внимание к некоторым достаточно мелким вопросам, которые так или иначе надо было бы решить, то ли введя детальные правила, то ли предоставив их на усмотрение контролеров. Если не принимается во внимание час рождения, а только число, то надо ли принять для этого неизвестного нам часа 0 часов, 12 часов, 24 часа? Как быть с летним временем или с могущей иметь значение разницей во времени места рождения и места пребывания ребенка? Можно было бы также заняться буквоедством в связи с 29 февраля. Но мы не будем на этом останавливаться, а предпочтем рассмотреть более серьезный вопрос, тоже взятый из железнодорожной практики.

Каждый пассажир имеет право на бесплатный провоз 30 кило багажа. Для ускорения обслуживания используются весы, точность которых не очень велика. Железнодорожный служащий бросает быстрый взгляд на их шкалу и провозглашает, каков вес в килограммах, без долей. В соответствии с тем, сказано ли 30 или 31 кило, пассажир освобождается от платы или оплачивает излишек. От инструкций, полученных служащим, и от того, как он их толкует, зависит, скажет ли он 31, а не 30, начиная с некоторого веса, который может быть равен точно 30 000 граммам или 30 050, или 30 100, или 30 500, или 30 900, или 30 950. Будем рассуждать в предположении, что этот вес равен 30 500, но ничего не изменится, если исходить из другого значения. Итак, допустим, что служащий объявляет 31 кило, если ему кажется, что вес, наблюдаемый им, равен или превышает 30 500. Сказать, что точность весов ограничена, значит сказать, что точный вес содержится, например, между 30 480 и 30 520, и тогда один шанс из двух как за то, что служащий объявит 30, так и за то, что он объявит 31. Более точно, вероятность того, что он объявит 31, равна, быть может, нулю при весе 30 400, затем возрастает, сначала медленно, потом быстрее, и становится равной 0,5 при весе 30 500. Далее она будет расти, сначала быстрее, потом медленнее, и станет равной единице при весе 30 600. Таким образом, вместо разрывности, которая могла бы, казалось нас шокировать, устанавливается непрерывность. Впрочем, эта непрерывность достигается иной раз за счет того пунктуального пассажира, который, зная в совершенстве правила и порядки, хотел бы использовать до предела свои льготы и, взвесив точно свой багаж, взял бы с собою 30 499 граммов. Такой пассажир был бы уверен, что он ничего не заплатит, тогда как один шанс из двух был бы за то, что ему придется платить.

Очевидно, что трудности одинаковы, какова бы ни была точность употребляемого измерительного устройства (можно повысить точность и путем достаточно частых повторных измерений). Например, в те времена, когда существовало свободное обращение золотых монет, считалось, что они, будучи достаточно долго в ходу, несколько стирались и теряли в весе. Поэтому был установлен определенный допуск порядка миллиграмма. Но когда оказывались вблизи этого предельного допуска с точностью до десятой миллиграмма, то мог быть один шанс из двух за то, что монета будет признана или не признана полноценной при взвешивании в той или иной кассе.

49. Физическая непрерывность согласно Пуанкаре. Предыдущие соображения можно сопоставить с определением физической непрерывности, данным Пуанкаре в его книге «Наука и гипотеза». В свое время я высказал некоторые возражения против этого определения, на которые Пуанкаре не ответил, и это позволяет думать, что он с ними согласился [1]). Понятие физической непрерывности, согласно Пуанкаре, сводится к допущению, что одновременно могут быть следующие равенства и неравенства:

$$A = B, \qquad B = C,$$
$$A > C.$$

[1]) Мои возражения опубликованы в 1908 г., а Пуанкаре скончался почти внезапно в 1912 г., после хирургического вмешательства.

Это сводится к заявлению, что *средства, которыми мы располагаем*, не позволяют нам отличать величину A от величины B, величину B от величины C, но все же мы можем установить, что величина A больше величины C.

При этом бо́льшая или меньшая точность *средств, которыми мы располагаем*, значения не имеет, как только эти средства раз навсегда определены. Мы можем грубо сравнить веса — прикидкой, или длины — на глазок; и можно использовать то или иное средство для измерения или сравнения, изобретенное физиками и более или менее совершенное. Каков бы ни был примененный способ, всегда будет *минимум различения*, ниже которого разница между A и B настолько мала, что она нам кажется нулевой, и мы заключим, что A и B равны; точно так же B и C нам кажутся равными, однако разница между A и C достаточно велика, чтобы мы нашли A бо́льшим, чем C.

Допустим, для простоты, что мы не располагаем никакими физическими инструментами,а только своими мускулами и глазами; чтобы не было лишних трудностей, нужно предположить, что сравниваются предметы сходной формы и сходного состава. Действительно, мы рисковали бы допустить грубые ошибки, если бы пожелали сравнить вес медного шара и шара из пуха, приподнимая их, или, став перед домом, пытались определить на глаз, больше или меньше его высота его ширины. Поэтому предположим, что мы сравниваем металлические шары одинакового диаметра, веса которых различны потому, что эти шары в разной мере полы. Нам кажется, что шары A и B одного веса, как и шары B и C, но мы замечаем, что A кажется нам более тяжелым, чем C. Но в таком случае, и в этом состоит мое возражение Пуанкаре, нам легко сделать вывод, что шар B, который казался нам равным A, тоже больше чем C. Действительно, если B меньше C, то разность $A - B$ должна быть больше разности $A - C$, положительность которой нами установлена, то есть мы должны были бы обнаружить, что A больше B, а не то, что A равен B. Равным образом, из того, что B показался нам равным C, следует, что B меньше A, ибо если бы B был больше A, то обнаружилось бы, что B больше C, а не равен ему. Иными словами, если опытным путем установлено, что

$$A = B, \qquad B = C,$$
$$A > C,$$

то отсюда логически следует, без каких бы то ни было новых опытов, что

$$A > B > C.$$

Таким образом, возможно, имея большое число шаров, близких по весу, выявлять сравнительно малые различия в весе, используя результаты большого числа попарных сравнений этих шаров. Быть может, было бы даже выгоднее сравнивать общий вес двух шаров с общим весом двух других шаров. Но мы не будем останавливаться на этих деталях, потому что нельзя корректно рассматривать этот вопрос, не привлекая теорию ошибок, о которой речь пойдет в следующем параграфе.

Вернемся к формуле Пуанкаре, которой он характеризовал грубые экспериментальные результаты, приводящие к понятию физической непрерывности. Обобщая, мы можем написать:

$$A_1 = A_2, \quad A_2 = A_3, \quad A_3 = A_4, \ldots, \quad A_{99} = A_{100},$$
$$A_{100} > A_1.$$

Это нас в точности подводит к софизму кучи зерна. Скопление A_1 в 1010 зерен для нас неотличимо от скопления A_2 в 1020 зерен, а A_2 неотличимо от A_3 в 1030 зерен, ..., скопление A_{99} в 1990 зерен неотличимо от A_{100} в 2000 зерен, и, однако, последнее нам кажется более значительным, чем скопление в 1010 зерен. Таким образом, мы видим, что софизм в точности состоит в выводе из *физических равенств* $A_1 = A_2$, $A_2 = A_3$, и т. д., $A_{99} = A_{100}$, — *физического равенства* $A_1 = A_{100}$. Это было бы, конечно, верно, если бы имели дело с равенствами математическими, а не физическими. Из того обстоятельства, что добавка одного зерна не меняет для нас физически то, что мы видим, делается ошибочное заключение, что эта физическая видимость не должна измениться вследствие добавления любого числа зерен и что мы не имеем права заявить, начиная с определенного числа зерен, что перед нами куча зерна, раз перед нами не было такой кучи, когда начали добавлять зерна по одному.

Можно было бы также сказать, что будет не верно переносить в область физики классическое математическое рассуждение, состоящее в переходе от n к $n+1$: если установлено, что некоторая функция не изменяется при этом, то есть, что $\varphi(n+1) = \varphi(n)$, то отсюда заключают, что такая функция сохраняет одно и то же значение при n бесконечно возрастающем, то есть когда переменное число n превосходит любое наперед заданное число.

С помощью коэффициента вероятности можно ввести разрывность там, где по видимости имеется непрерывность. Как уже было сказано, мы утверждаем, что если нам покажут два одинаковой формы скопления зерен одного и того же урожая, причем одно содержит 1010 зерен, а другое 1020, то мы заявим, что они одинаковы. Если же нас заверят в том, что они различны и заставят сделать выбор между ними, указав на большее, мы ответим почти что наугад. Это значит, что на 100 последовательных опытов, проделанных с разными лицами, будет около 50 ответов как одного, так и второго рода, впрочем, отклонение от этого числа часто может превысить 5, то есть возможны и 45, и 55 правильных ответов. Можно ли допустить, что небольшая разница в 10 зерен на 1000 изменяет коэффициент вероятности настолько, что можно выявить это изменение при достаточном числе опытов? Положим, что этот коэффициент равен 0,501. Тогда, чтобы можно было надеяться на правильный ответ, нужно было бы около миллиона опытов, чтобы с достоверностью утверждать на основании их результатов, что коэффициент вероятности больше чем 0,5 и что, следовательно, скопление в 1020 зерен в среднем кажется бóльшим, чем скопление в 1010 зерен. Легко видеть, что даже если дать утвердительный ответ на наш вопрос, то достаточно привести другие примеры, скажем, добавление одного зерна к 10 000 вместо добавления 10 зерен к 1000, чтобы число опытов, необходимых для достаточно точного вычисления коэффициента вероятности, возросло сверх всяких возможностей представить себе их осуществление.

Итак, наше заключение таково, что формулы Пуанкаре не только дают единственное логичное разрешение софизма кучи зерна, но и показывают, что этот софизм позволяет выявить фундаментальное свойство экспериментальной науки — понятие физической непрерывности.

50. Ошибки наблюдения. Все точные научные изыскания, в частности астрономические наблюдения, ведутся с учетом постоянного наличия некоторых ошибок наблюдения, которые можно назвать нормальными. Это ошибки, которые получаются, каковы бы ни были искусство и добросовестность наблюдателя, сколь бы тщательно он ни старался избежать таких грубых ошибок, как, например, наблюдение одной звезды вместо другой, или ошибки в подсчете гирь, положенных на чашку весов.

Эти нормальные ошибки наблюдения тем меньше, чем более усовершенствованы используемые методы, то есть чем больше абсолютная точность наблюдений. Действительно, можно дать определение коэффициента точности, и закон ошибок, который зависит от этого коэффициента, всегда один и тот же [20]. Поэтому мы можем взять достаточно грубый пример, скажем, измерение длины в несколько метров посредством деревянного метра с миллиметровыми делениями. Известно, что если против миллиметрового деления приходится достаточно тонкая черточка, то можно отметить и десятую миллиметра, но при нескольких промерах возможна общая ошибка в несколько десятых. Закон ошибок тождествен с законом Лапласа — Гаусса для отклонений при повторных испытаниях. Если мы определим десятичную единицу ошибки u условием, что вероятность абсолютному значению ошибки превзойти u равна одной десятой, то мы заключим, что вероятность превышения этой абсолютной величиной числа $2u$ равна одной тысячной, вероятность превышения $3u$ — одной миллионной. При этом положительные и отрицательные ошибки одинаково вероятны.

Применим эти результаты к следующей задаче: измерены две величины a и b, и известно, что десятичная единица ошибки есть u; какова вероятность того, чтобы ошибиться при сравнении величин a и b? Предположим, что $a-b$ положительно, и обозначим через h и k положительные, либо отрицательные ошибки измерения. Тогда значения, которые дало измерение, суть $a+h$ и $b+k$. Мы ошибемся, то есть установим, что a меньше b, если

$$a+h<b+k,$$

то есть если

$$k-h>a-b.$$

Здесь нам надо применить легко доказываемый результат, а именно, что единица отклонения (или ошибки) для суммы (или разности), в данном случае для $a-b$, равна $u\sqrt{2}$, если для a и для b эта единица равна u. Следовательно, если $a-b=u\sqrt{2}$, то нужно, чтобы разность $k-h$ была положительна и превышала $u\sqrt{2}$ — десятичную единицу, стало быть, вероятность этого есть $^1/_{20}$; если $a - b = 2u\sqrt{2}$, вероятность равна $^1/_{2000}$. Итак, в последнем случае 1999 шансов из 2000 за то, что сравнение величин a и b будет произведено правильно с помощью независимых друг от друга измерений. При этом предполагается, что вероятности положительных и отрицательных ошибок одинаковы; это, возможно, не имеет места для некоторых наблюдателей, но тогда надо было бы только иначе определить десятичную единицу u.

Так теория ошибок наблюдения позволяет нам вычислить вероятность ошибки при сравнении двух величин, когда, вместо непосредственного их сравнения, эти величины измеряют одну независимо от другой. Такой метод сравнения часто является единственно возможным, так как не всегда легко переместить две величины так, чтобы провести их прямое сравнение. Даже если эти величины близки, прямое сравнение часто ошибочно, если мы видим эти величины по-разному. Например, очень трудно сравнивать вертикальную длину с горизонтальной, скажем, высоту потолка зала с его длиной или же высоту и ширину фасада пятиэтажного дома.

51. Повторные испытания и статистическая вероятность. Статистической вероятностью иногда называют наблюдаемую частоту появления одного и того же явления при значительном числе повторных испытаний. Так, метеорологические наблюдения, которые повторно производятся в одном и том же месте, каждодневно в течение столетия позволяют вывести, скажем, из температуры, которая отмечалась в январе, статистическую вероятность того, что средняя температура январского дня превосходит 5°, или того, что она ниже 0°. Какова бы ни была точность наблюдений, всегда налицо будет известная неопределенность тогда, когда назначенная грань достигается точно. Можно было бы уговориться принять тогда вероятность равной 0,5, ибо есть один шанс из двух за то, что действительная температура будет ниже, или, соответственно, выше, чем 0°, если средняя из наблюдений для этого дня точно равна 0°.

Некоторые авторы, следуя Р. Мизесу, полагают, что все вероятности суть вероятности статистические, определенные в некотором множестве, которое называют коллективом. Я изложил в другом месте причины, по которым такая теория мне не представляется приемлемой [21].

Нам известно, что при определении вероятности по наблюдениям частоты возможны ошибки, вероятности которых подчиняются закону Лапласа — Гаусса. При этом единица ошибки пропорциональна корню квадратному из числа наблюдений, если речь идет о наблюденном числе благоприятных случаев, и обратно пропорциональна этому корню квадратному, если речь идет о частоте. Это означает, что надо умножить на 100 число наблюдений, чтобы получить по соответствующим частотам значение вероятности еще с одной точной цифрой.

Когда мы имеем дело с наблюдениями, проводимыми последовательно, например, с измерениями январских температур в Париже, нет возможности увеличить число этих наблюдений в прошлом, и это число возрастает с каждым прошедшим годом только на единицу. Более того, представляется затруднительным допустить полное постоянство климата, наоборот, наблюдения, ведущиеся вблизи больших городов, указывают на медленные вековые колебания.

Итак, мы видим, что вопрос о том, достаточно ли определенное число испытаний, чтобы дать удовлетворительное приближенное значение статистической вероятности,— из числа тех, в которых применимы возражения характера софизма кучи зерна. Выше мы приводили пример о доле рождений мальчиков, когда наблюдения весьма многочисленны,— их больше миллиона в год, так что можно с достоверностью утверждать, что коэффициент вероятности близок к 0,51 и, во всяком случае, заведомо больше 0,5. В случае зондажа общественного мнения мы также приближенно указали число испытаний, которое надо проделать, впрочем, при условии, что к точности результатов не предъявляют больших требований. Но нам нечего возразить тому, кто предложил бы провести не 5000 опросов, а 4000 или 6000: тут перед нами та же трудность, что и с кучей зерна. Эту трудность не следует недооценивать, но вместе с тем не надо ей придавать чрезмерное значение: она не должна быть предлогом для того, чтобы воздержаться от всякого действия. Таковым должен быть вывод из этой главы, и его не следует терять из виду при чтении следующей, и последней, главы, которая в свою очередь дает вывод из всей книги.

Глава IX

ВЕРОЯТНОСТЬ СТАНОВИТСЯ ДОСТОВЕРНОСТЬЮ

52. Достоверность и ошибка. Проблема ошибки занимала философов со времен глубокой древности. По тонкому замечанию великого греческого философа, человек, который ошибается, является вдвойне незнающим: он не знает точного ответа и он не знает, что он его не знает. Именно это второе незнание опасно, так как внутренняя уверенность ошибающегося, что он дает правильный ответ, совершенно такова, как и уверенность того, кто знает и не ошибается. Все мы знаем, что подвержены ошибкам и что мы иной раз ошибаемся вполне чистосердечно. Это должно заставить сделать вывод, что имеется отличная от нуля вероятность того, что лицо, добросовестность которого вне подозрений, ошибается, давая нам некую справку. К этому пункту мы вернемся в следующем параграфе, но сначала мы хотим остановиться на тех случаях, когда мы абсолютно уверены, в точном смысле этого слова, в справедливости известных истин.

Будем различать две категории истин: истины математические и истины практические; сначала займемся первыми.

Банальным и постоянно упоминаемым примером математической истины является то, что 2 плюс 2 равно 4, на что некоторые возражают, что это — словесное определение, а не истина. В действительности 4 определяется как $3 + 1$, а 3 — как $2+1$, так что в самом деле необходимо краткое доказательство, чтобы установить, что 2 плюс 2 равно 4. И самые сложные математические доказательства, как и это простенькое доказательство, являются набором силлогизмов, каждый из которых весьма прост. Следовательно, дело только в том, чтобы проверить, не вкралась ли ошибка в такой набор силлогизмов, иной раз очень сложный. Чтобы ограничиться тривиальным случаем,— сложение тридцати шестизначных чисел, произведенное хорошим счетоводом, столь же просто, как и то, что 2 плюс 2 равно 4, однако иногда оно содержит ошибку, даже если его повторить дважды.

Единственная причина, в силу которой мы считаем достоверными хорошо доказанные математические факты, например, что поверхность сферы в четыре раза больше площади большого круга, состоит в том, что доказательства повторялись и проверялись большим числом лиц, иной раз тысячами, а то и миллионами, как в случае доказательств, восходящих к Евклиду. Вероятность того, что все эти лица допустили одну и ту же ошибку, очевидно, настолько ничтожна, что наша абсолютная уверенность оправдана. В наши дни математик, открывший новую теорему, публикует ее в издании, которое выпускается в нескольких сотнях экземпляров. Имеется, стало быть, немало шансов за то, что несколько читателей заинтересуются новым результатом и проверят его доказательство, или даже придумают новое и более простое. Именно так по истечении известного времени новые результаты входят в состав результатов достоверных и их начинают рассматривать как достоверные. Однако весьма возможно, я сказал бы даже — вероятно, что некоторые частные, не очень интересные результаты не привлекли ничьего внимания, и быть может, около века спят в пыли библиотек, и что среди них есть и неверные. Но если даже такое обстоятельство будет установлено, оно ничуть не поколеблет нашей уверенности в достоверности результатов, общепринятых у математиков и воспроизведенных в многочисленных учебниках, так как они подверглись многочисленным проверкам.

Случай сложных и длинных сложений заслуживает особого упоминания, так как при крайней теоретической простоте здесь возникают некоторые практические осложнения. Если речь идет о сложении 50 восьмизначных чисел, то дело прежде всего в том, чтобы знать, в какой форме нам даны эти числа. Если это числа, списанные счетоводом в его гроссбух с различных счетных документов (таких, как чековые книжки, долговые уведомления и т. п.), то надо сначала поставить вопрос, правильно ли воспроизведены эти числа. Вместе с тем, если другому счетоводу поручено проверять первого, нужно знать, воспользуется ли проверяющий числами, списанными первым, или в свою очередь сам перепишет их с документов. Расхождение может получиться или из-за ошибки при переписывании, или из-за ошибки при сложении. В случае совпадения можно было бы вычислить вероятность того, что это совпадение вызвано двумя различными ошибками при сложении или переписывании,— ошибками, которые в точности взаимно погасились.

С другой стороны, если оба счетовода выполняют действия над одними и теми же числами, выписанными одно под другим, не могло ли получиться так, что из-за плохо выписанной или неправильно помещенной в столбец цифры они оба допустили одинаковую ошибку? Поэтому, если желательна полная уверенность, то благоразумно будет потребовать, чтобы сложение было проделано по меньшей мере тремя счетоводами, причем каждый из них должен сам переписать для себя числа с оригиналов, каковые по определению считаются надежными. Таким образом, этот случай — промежуточный между теоретической достоверностью математической теоремы и практической достоверностью, о которой сейчас пойдет речь.

Никто из нас не мог бы жить, если бы не считал практически достоверным известное число сведений о себе самом, о своем окружении, своем доме, о городе, где он живет, и т. д. Можно возражать против таких, в некотором роде субъективных, достоверностей: выпадение памяти, помешательство, обманчивые воспоминания, навеянные снами, галлюцинации и т. п.— могут дать повод для сложной дискуссии. Вот почему предпочтительнее ограничиться достоверностями, которые можно назвать объективными и которые являются общими для всех жителей какой-то страны, по крайней мере для тех, кто имеет минимальное образование и пребывает в здравом рассудке. Такие достоверности могут быть различного рода; главнейшие — это географические или персональные, то есть относящиеся к существованию определенных городов в стране, а также в других странах, чужих и далеких, и к некоторым так или иначе прославившимся личностям, о которых известно, что одни из них живы, а другие недавно скончались. Эти достоверности основаны на большом числе согласующихся свидетельств, полученных из газет или по радио, хотя хорошо известно, что такая информация не избавлена от ошибок. Но мы твердо знаем, что верим в существование столиц, глав государств и премьер-министров, знаменитостей искусства или спорта не в силу повторения случайных ошибок. Конечно, кое в ком могут зародиться сомнения, если сообщается о политических событиях, скрыть которые некоторые государства, возможно, заинтересованы,— особенно если известно, что эти государства располагают средствами для этого. Но сомнение— это не то же, что ошибка, и наша уверенность остается абсолютной, если она подтверждается совпадением свободных и не зависящих друг от друга информаций. Единственное ограничение, которое надо оговорить, — то, что наша уверенность относится ко вчерашнему дню, потому что сегодня утром могла произойти катастрофа, о которой мы пока не знаем. Но неведение, которое мы сознаем, не ошибка. Уточненная таким образом наша практическая достоверность равноценна теоретической достоверности математиков. Мы столь же уверены в существовании Лондона, как и в свойствах конических сечений.

53. Вероятности, практически пренебрежимые. Как мы уже говорили, на практике приходится пренебрегать небольшими вероятностями, которые, однако, не столь исключительно малы, как те вероятности, которые абсолютно пренебрежимы. Например, мы легко доверяем значительную сумму сидящему за окошком служащему и терпеливо ожидаем, пока он оформит различные документы, прежде чем выдаст нам квитанцию или расписку. В этом случае мы не только выявляем доверие его честности, что естественно, но и пренебрегаем небольшой вероятностью того, что он вдруг скоропостижно скончается. Так же обстоит дело, когда вверяешь свою жизнь шоферу машины, общественной или частной. Во многих других случаях приходится практически действовать так, как если бы людям было обеспечено если не бессмертие, то уж заведомо прожить ближайшие несколько часов и даже дней, по крайней мере, если они молоды и хорошо себя чувствуют, да к тому же мы уверены, что они не готовятся к чему-то рискованному.

Но эти примеры, которые легко было бы умножить, не должны рассматриваться как примеры превращения вероятности в достоверность. Потому что, хотя в таких случаях мы действуем с полной уверенностью, мы все же знаем, что ее у нас нет. Если бы нам предложили поразмыслить, мы были бы готовы признать, что подвергаемся риску обмануться. Дело не изменится, если мы добавим, что этот риск мы считаем настолько малым, что не только разумно на него пойти, но и решение отказаться от того, чтобы подвергаться риску при подобной малой вероятности, было бы абсурдным, потому что практически сделало бы невозможным наше повседневное существование.

54. Требования философов и ученых. Итак, вполне естественно, что мы оставляем в стороне эти соображения, заимствованные из житейской практики, и попытаемся сформулировать проблему так, чтобы это было приемлемо для философа или ученого, привыкшего говорить точным языком. Имеем ли мы право употребить термин достоверность, когда нам известно, что вероятность ошибки, хотя и крайне мала, но не равна строго нулю? Тут мы возвращаемся к вероятностям, пренебрежимым и в сверхкосмическом масштабе — имеются в виду такие вероятности, которые выражаются степенью десяти с отрицательным показателем, превосходящим (по абсолютному значению) миллион и даже, быть может, миллиарды миллиардов. Таковы те вероятности, которые встречаются в кинетической теории газов и в термодинамике. Такова вероятность чуда Джинса (вода помещается в раскаленную печь и превращается в лед) или дактилографического чуда (чисто случайное и точное воспроизведение тома в тысячу страниц или даже целой библиотеки).

Само собой разумеется, что прежде всего нам надо принять все необходимые предосторожности, чтобы при испытании, определенный результат которого мы объявили невозможным, не было фальши. Если возникают подозрения, их можно, как правило, устранить, усложняя испытания. Например, если мы подозреваем, что дактилограф, заявивший нам о своем незнании английского языка, выучил наизусть трагедию Шекспира, то можно указать десять малоизвестных книг на разных языках с латинским алфавитом и потребовать, чтобы отпечатанный на машинке текст воспроизвел каждую из этих книг, если брать буквы текста через 10, начиная с первой, затем со второй, и т. д.

Еще проще было бы потребовать, чтобы этот случайный текст оказался текстом газет, которые завтра появятся в таких-то европейских и американских столицах.

Мы знаем, как вычислить вероятность подобного предприятия, когда известно общее число букв. Стало быть, если мы утверждаем, что дактилографическое чудо невозможно, и добавляем, что такая невозможность для нас достоверна, мы сознательно и принципиально пренебрегаем ничтожной вероятностью. Иные могут посчитать, что мы не имеем права это делать. Сознаюсь, может показаться, что и меня надо отнести к ним, так как в предыдущих публикациях я пользовался оборотом речи некоторых физиков, в частности Джинса, а именно, что нарушение принципа Карно — Клаузиуса не является строго невозможным, а только в *высшей степени невероятным*.

Теперь же я смотрю на дело так, что надо отбросить подобное словоупотребление, ибо оно, по моему мнению, может создать у читателя путаницу в представлениях, и только применение слова *достоверность* может рассеять эту путаницу. Пожалуй, надо согласиться с одним математиком, что эта достоверность не совсем того же рода, что достоверность определенных математических теорем (например, теоремы о поверхности шара),— теорем, доказательства которых были проверены после того, как они были впервые даны, миллионами людей. Правда, можно и тут возразить математику, что он считает столь же достоверными значительно более поздние и сложные теоремы, доказательство которых проверено довольно малым числом лиц, и что в этом последнем случае заведомо имеется малая вероятность ошибки. Эту вероятность, безусловно, трудно оценить, но нам ничто не дает права считать ее меньшей, чем вероятность дактилографического чуда.

Но если для полноты, пожалуй, необходимо сказать об этой точке зрения математика, то надо все же указать, что как в случае чуда Джинса, так и в случае дактилографического чуда мы имеем дело не с чисто теоретическими построениями, а с явлениями, наблюдаемыми в условиях, уточнить которые нетрудно. Эти уточнения условий опыта многим покажутся направленными на то, чтобы устранить всякое подозрение в обмане (мы будем говорить об обмане, если осуществляется не тот опыт, который был описан), но наша уверенность в том, что опыт не может быть успешным, такова же и даже больше, чем наша уверенность в делах практического порядка. Быть может, и тут можно было бы указать несколько исключений, весьма немногочисленных, касающихся событий прошлого, относительно которых все одного мнения, например, что Наполеон I жил и умер. Но можно быть уверенным в том, что по поводу других исторических событий могут возникать сомнения, если не ограничиваться общим указанием на эти события, а уточнять обстоятельства и даты. Значительно бóльшими становятся вероятности ошибок, как только мы переходим к суждениям относительно современных явлений, например,о существовании удаленного от нас города,или такого-то главы государства, или какой-то знаменитости, так как вероятность кончины или катаклизма, как бы мала она ни была, громадна по сравнению с вероятностями, которыми мы решили пренебрегать.

55. Объективные характеристики достоверности. Впрочем, можно отвести многие из возражений типа тех, которые только что выдвигались в связи с положением об объективном характере достоверности того, что дактилографическое чудо невозможно. Действительно, уверенность в этом с равной силой овладевает людьми, культурный уровень которых достаточен для того, чтобы понять суть вопроса. Следовательно, она является всеобщей, чего нельзя сказать относительно достоверностей порядка исторического или географического: если француз не может усомниться в существовании Наполеона, не так обстоит дело с человеком, живущим очень далеко от Франции и не знающим ее истории, как не знает истории его страны француз. Только некоторые астрономические явления одинаково наблюдаются всеми людьми, да и они значительно видоизменяются для жителей полярных районов.

В порядке уточнения можно указать на то, что большинство практических достоверностей, которые можно считать объективными в том смысле, что они являются общими для многих людей, обязаны этим тому обстоятельству, что они относятся к явлениям весьма распространенным, которым приписывается известное значение. Но если бы мы не обладали свидетельствами других людей, у нас не было бы никаких оснований верить в эти явления. Наоборот, если дело идет о дактилографическом чуде, то основной опыт можно описать в различных видах, доступных и тому, кто ничего не знает о какой бы то ни было пишущей машинке. Этот опыт заведомо можно было бы видоизменить так, чтобы он был доступен для народов не с алфавитной, а с идеографической письменностью. Для всякого способного к размышлению человека успех опыта, состоящего в чисто случайном повторении одного из литературных шедевров, *достоверно* невозможен. Даже если бы речь шла о простом сонете, вполне понятно, что нельзя согласиться с таким упрощенным рассуждением: нет причин для того, чтобы первая случайная выборка не дала первой буквы сонета; так же обстоит дело со второй; затем с третьей буквой и т. д. вплоть до последней. Именно такая повторная удача представляется невозможной уже для простого сонета из 600—700 букв, тем более для тома в миллион букв. С той же достоверностью, с какой мы отрицаем возможность дактилографического чуда, мы позволяем себе отрицать и возможность термодинамического чуда: то ли того, чтобы случайно в небольшом объеме кислород воздуха отделился от азота, так чтобы в открытом сосуде оказался литр чистого кислорода, то ли того, чтобы значительное количество тепла перешло от холодного тела к более теплому (чудо Джинса).

Некоторые критики, быть может, будут защищать чистоту терминологии, противясь употреблению слова достоверность там, где математик устанавливает крайнюю малость вероятности противоположного утверждения. Другие критики, напротив, быть может, будут упрекать нас в том, что слишком много значения придается вопросу словоупотребления, и скажут нам, что в конце концов безразлично, назвать ли какое-то явление в высшей степени невероятным или назвать как само явление, так и его наблюдение достоверно невозможным. Нам же кажется, что далеко не безразлично пользоваться или не пользоваться вполне отчетливой терминологией, тогда как выражение «в высшей степени невероятный» и любое ему подобное может внести путаницу и способствовать распространению ложных представлений.

Когда мы утверждаем объективную достоверность, это значит, что если заслуживающее доверия лицо заявило бы нам, что наблюдалось явление, которое мы объявили заведомо невозможным, то мы были бы убеждены в том, что налицо обман. Что касается наших возможностей раскрыть этот обман, они, очевидно, будут зависеть от средств, которыми мы будем фактически располагать для проведения углубленного обследования условий, при которых, согласно показаниям, произошло данное явление.

56. Проблема жизни. В заключение мне представляется необходимым сказать несколько слов об одном вопросе, который не относится к предмету этой книги, но все же полное умолчание о нем могло бы вызвать упреки некоторых читателей.

Я имею в виду проблему появления жизни на нашей планете (и, возможно, на других планетах вселенной) и вероятность того, что ее появление случайно. Эта проблема представляется мне выходящей за рамки нашей темы именно потому, что слишком сложна оценка порядка величины, соответствующей указанной вероятности. Как раз в связи с последним пунктом мне хотелось бы дать некоторые разъяснения.

Когда мы вычисляли вероятность чисто случайного воспроизведения напечатанного литературного произведения, однотомного или многотомного, наши читатели, конечно, не упускали из виду того, что такое произведение явилось когда-то плодом деятельности человеческого мозга. Следовательно, этот мозг куда сложнее, чем отдельный плод его деятельности. Нельзя ли тогда сделать вывод, что вероятность создания этого мозга слепыми силами случая куда меньше, чем вероятность дактилографического чуда?

Очевидно, так обстояло бы дело, если бы вопрос состоял в том, чтобы выяснить, можно ли действительно создать человеческое существо, комбинируя наудачу известное количество простых веществ. Но проблема возникновения жизни ведь ставится иначе. Все сходятся на том, что живые существа являются итогом длительного развития, начиная с простейших организмов, и в этом развитии сказываются определенные свойства живой материи, которые не позволяют утверждать, что оно происходило по законам случая. Некоторые из этих свойств живой материи имеются и у определенных форм материи неживой, таких, как кристаллы. Не представляется возможным применить законы исчисления вероятностей к явлению образования кристалла из более или менее перенасыщенного раствора. По крайней мере, нет возможности рассматривать такую вероятностную задачу без учета некоторых свойств материи, свойств, которые облегчают образование кристаллов и которые мы обязаны установить. Как мне кажется, мы должны считать правдоподобным, что образование простейших живых организмов и их развитие тоже обусловлены такими элементарными свойствами материи, которые нам полностью не известны, но наличие которых мы все же должны допустить.

Подобные же замечания можно было бы сделать по поводу возможных попыток применить исчисление вероятностей к космогоническим проблемам. По-видимому, и в этой области изложенные нами результаты в настоящее время большой пользы не принесут.

ЗАМЕТКА О ПЕТЕРБУРГСКОЙ ИГРЕ НА КВИТ

57. Петербургская игра на квит. Условия игры, при которых получается петербургский парадокс, могут показаться в достаточной мере искусственными. Однако их легко осуществить с помощью игры на квит, и такую игру естественно тоже назвать петербургской.

Допустим, что два игрока, Петр и Павел, играют в орла и решку, причем Петру предоставляется право устанавливать размер ставки и прервать игру, когда ему заблагорассудится. Такие условия не являются неразумными, если средства Павла превышают средства Петра. Сама же игра остается справедливой и математическое ожидание каждого игрока остается равным нулю, так как в каждой партии шансы каждого игрока на выигрыш равны его шансам проиграть.

В этих условиях Петр избирает такую игру на квит. В первой партии он устанавливает ставку в 2 франка и в случае выигрыша, получив 2 франка, он прекращает игру с тем, что она может возобновиться на тех же условиях, то есть с первой ставкой в 2 франка. Если Петр проигрывает первую партию, он теряет 2 франка и тогда назначает в следующей игре ставку в 6 франков. Стало быть, если он выигрывает вторую партию, его чистая прибыль составляет 4 франка, и тогда Петр прекращает игру. Если он проигрывает вторую партию, он теряет всего 8 франков и в третьей партии назначает ставку в 16 франков, так что он получает в случае выигрыша чистую прибыль в 8 франков. Если он проиграет третью партию, он потеряет в итоге 24 франка и тогда он назначит ставку в 40 франков, чтобы в случае выигрыша четвертой партии иметь чистой прибыли 16 франков. В случае же проигрыша четвертой партии общий убыток Петра составит 64 франка. Легко видеть, что если Петр проиграет $(n-1)$ первых партий, его общий проигрыш составит $(n-1)\cdot 2^{n-1}$ и ему надо будет в n-й игре назначить ставку в $(n+1)\cdot 2^{n-1}$, если он желает обеспечить себе чистую прибыль в 2^n франков в случае выигрыша n-й партии. Если же он ее проиграет, его убыток будет равен

$$(n-1)\cdot 2^{n-1}+(n+1)\cdot 2^{n-1}=2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n,$$

что подтверждает закон, сформулированный нами для $(n-1)$-й партии.

Если исходить из естественного допущения, что средства Петра ограничены (или же, что он установил для игры некую предельную сумму), то надо допустить, что Петр установил и максимум для числа партий. Этот максимум не должен превышать n, если Петр не может или не хочет, чтобы его проигрыш превысил $n\cdot 2^n$, с риском достичь $(n+1)\cdot 2^{n+1}$.

Теперь мы вычислим математические ожидания для Петра и Павла в случае, когда максимальное число партий установлено равным n, причем игра прерывается, или Петр выигрывает до достижения этого максимума.

58. Вычисление математических ожиданий. Математическое ожидание для каждого игрока состоит из двух членов, один из которых положителен и соответствует ожиданию выигрыша, тогда как другой отрицателен и соответствует проигрышу.

Так как выигрыш Петра равен проигрышу Павла и наоборот, то достаточно вычислить положительные математические ожидания для обоих игроков.

Петр может выиграть n различными способами, так как он заканчивает игру, как только он выиграл одну партию, а эта партия может быть первой, второй и т. д., наконец, n-й. Его полное математическое ожидание равно сумме математических ожиданий, соответствующих каждой из этих n возможностей, так как он мог бы продать каждое из них различным покупателям, расположенным принять участие в справедливой игре.

Вычислим математическое ожидание для Петра, соответствующее выигрышу k-й партии, где k — любое целое число, меньшее или равное n. Согласно принятым условиям, игра заканчивается на k-й партии, если Петр проиграл $k-1$ предыдущих партий и выиграл k-ю. Вероятность этого равна $\frac{1}{2^k}$, ибо такова вероятность того, чтобы в k последовательных партиях проигрыши и выигрыши чередовались в любом установленном заранее порядке. Вероятность того, что первая партия будет выиграна определенным игроком, равна $1/2$, и так же обстоит дело для второй партии и для каждой из последующих. Следовательно, чтобы получить вероятность сложного события, состоящего в выигрыше каждой из k партий заранее указанным игроком, надо перемножить k чисел, каждое из которых равно $1/2$.

С другой стороны, выигрыш Петра в рассматриваемом нами случае, то есть когда первая выигранная им партия есть k-я, равен 2^k. Поэтому математическое ожидание, равное произведению этого выигрыша на его вероятность, равно единице.

Полное математическое ожидание для Петра в случае выигрыша равно, стало быть, сумме n равных слагаемых, соответствующих n значениям для k, от 1 до n включительно, и каждое слагаемое равно единице. Итак, это положительное математическое ожидание $\mathcal{E}$ для Петра равно n, а отрицательное математическое ожидание для Павла равно $-\mathcal{E}$, то есть $-n$.

Вычислим теперь положительное математическое ожидание $\mathcal{E}'$ для Павла. Согласно принятым условиям, он может оказаться в выигрыше только в том случае, когда он выиграет n первых партий, а вероятность этого равна $\frac{1}{2^n}$. Мы знаем, что тогда выигрыш Павла составит $n \cdot 2^n$, следовательно, его математическое ожидание

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{2^n} n \cdot 2^n = n.$$

Итак, полное математическое ожидание Петра $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$ равно нулю, равно как и полное математическое ожидание Павла $\mathcal{E}' - \mathcal{E}$. Так и должно было получиться, потому что игра справедлива в каждой из партий, значит, она должна быть справедливой и в их совокупности. Тем не менее, мы сейчас покажем, что когда n — большое число, возникают затруднения.

59. Случай, когда число партий достаточно велико. Предположим, что состояние Петра достаточно велико для того, чтобы число n можно было принять равным 30. Так как 2^{30} приблизительно равно 10^9, то есть миллиарду, то состояние Петра, которое должно превышать единицу ставки в $n \cdot 2^n$ раз, должно быть при $n=30$ больше чем 30 миллиардов таких единиц. Пусть в качестве единицы ставки принят сантим, стало быть, в первой партии ставка равна 2 сантимам—тогда Петр должен иметь свыше 300 миллионов франков и, естественно, Павел должен располагать столь же большими средствами.

При весьма малом размере начальной ставки мы должны предположить, что Петр и Павел разыгрывают весьма большое число серий, и каждая серия партий обрывается тогда, когда выигрывает Петр. Нетрудный подсчет (мы избавим от него наших читателей) показывает, что среднее число партий в каждой серии, если разыгрывается весьма большое число серий, равно двум. Если каждая партия длится только 5 секунд, то серия в среднем продолжается 10 секунд, и каждый день есть возможность сыграть около 3000 серий, а за год — около миллиона. Чтобы серия партий закончилась его выигрышем, Павлу необходимо выиграть 30 партий (по условию, максимальное число партий в серии), и вероятность этого равна одной миллиардной. Итак, Павел должен в среднем выигрывать один раз в тысячу лет при темпе игры один миллион партий за год.

Следовательно, у Павла очень мало шансов выиграть. Для него теоретическое математическое ожидание остается равным нулю, как и для Петра, но практическое математическое ожидание для него отрицательно, тогда как для Петра оно положительно и немногим меньше 30 сантимов для каждой серии. Действительно, надо считать пренебрежимыми математические ожидания, соответствующие сериям, превышающим 25 партий,— сериям, которые на практике никогда не наблюдались.

Если мы принимаем количество серий, сыгранных за год, равным миллиону, то средний годовой выигрыш Петра составит около 250 000 франков, считая по 25 сантимов на серию. Проигрыш Павла равен той же сумме. Все же, в виде исключения, выигрыш Петра может оказаться бóльшим, если при исключительной удаче он выиграет серию в 20—30 партий. И, как редчайшее исключение, может статься, что Павел выиграет 30 миллиардов единичных ставок, то есть 300 миллионов.

Можно заметить, что в самом благоприятном для Петра случае (и этот случай надо считать нормальным) годовой выигрыш, приносимый ему его игрой на квит, не превосходит одной тысячной того капитала, который он обязан всегда иметь в своем распоряжении, чтобы вести такую игру. Все же надо считать эту игру на квит выгодной для Петра, если не учитывать значительной потери, вызываемой невозможностью для него получать проценты с капитала. Эта выгода была бы еще больше, если бы отношение капитала Петра к ставке было бы в тысячу раз больше и позволяло ему установить максимальное число партий в серии равным 40. Вероятность проигрыша была бы настолько мала, что ею можно было бы пренебречь, а достоверность регулярного выигрыша практически была бы полной, особенно, если учесть продолжительность человеческой жизни.

Однако вполне очевидно, что с математической точки зрения Жозефа Бертрана, то есть предполагая, что наследники могут продолжать игру сколько угодно столетий, в конце концов день реванша для Павла наступит. Таким образом, игра справедлива, сколь бы велико ни было максимальное число n партий в серии, установленное заранее и раз навсегда.

Но мы сейчас увидим, что если значение n не устанавливается наперед, получаются другие выводы.

60. Случай, когда число партий не установлено. Если согласиться с точкой зрения Бертрана в его работе о петербургском парадоксе, то не следует принимать во внимание ни того, что ограничены средства обоих игроков, ни того, что ограничена и продолжительность их жизни. Рассматриваются абстрактные игроки, играющие на абстрактные деньги, а выигрыши и проигрыши попросту записываются в огромную книгу. Эта книга — тоже абстракция, так как в иных случаях размеры ее должны были бы превысить размеры известной нам вселенной, чтобы в нее можно было вписать сверхастрономические числа, которыми выражаются долги игроков.

Очевидно, математикам позволительно изучать такие абстрактные задачи, и история науки показывает нам, что построения, по видимости лишенные реального содержания, оказывались иногда весьма полезными для развития науки и для ее практических применений.

Итак, предположим, что максимальное число n партий в серии не фиксируется, а за Петром остается право устанавливать ставки по своему усмотрению и прекратить игру, когда ему это угодно. Стало быть, он может прибегнуть к петербургской игре на квит и продолжать игру, пока не выиграет одну партию.

Тогда соблазнительно следующее рассуждение. Как мы видели, математические ожидания $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$, соответственно для Петра и Павла, в случае выигрыша оба равны n, каково бы ни было число n и, таким образом, разность $\mathscr{E} - \mathscr{E}'$ постоянно равна нулю, следовательно, игра является справедливой. Так как это верно для любого n, то это верно и при бесконечном возрастании n, поэтому предел разности $\mathscr{E} - \mathscr{E}'$ при n бесконечном равен нулю. Итак, игра остается справедливой и при новых условиях: математическое ожидание для каждого из игроков остается нулем.

Все же такое рассуждение неточно, и мы поймем причину этого, если обратимся к вычислениям, с помощью которых получены значения $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$. Что касается $\mathscr{E}$, это — сумма n математических ожиданий, каждое из которых равно единице. Когда n возрастает, число членов суммы увеличивается, а каждый член остается равным единице.

Таким образом, их сумма неограниченно возрастает, то есть ее надо считать бесконечной при бесконечном n. Иначе говоря, при достаточно большом значении n она может быть сколь угодно велика.

Против этого можно было бы возразить, что члены высокого порядка в этой сумме соответствуют весьма мало вероятным событиям, которые могут произойти, только если будет сыграно исключительно большое число серий партий. Однако для каждого из этих членов можно установить такое число серий (равное 2^n для члена порядка n), что будут серьезные шансы за осуществление этого события. Но наше рассуждение проводится в предположении, что число серий не ограничено привходящими обстоятельствами, как продолжительность жизни игроков, от каковых мы отвлекаемся. Поэтому мы действительно получим сколь угодно большое значение для $\mathscr{E}$ при условии, что допускается достаточно большое число сыгранных серий. Итак, законно сказать, что $\mathscr{E}$ бесконечно в математическом смысле этого слова, ибо это переменная величина, которая может превзойти любое данное число.

Совсем иначе обстоит дело с $\mathscr{E}'$. Если мы обратимся к n°58, то увидим, что $\mathscr{E}'$ получено в виде произведения двух множителей, вероятности и выигрыша, причем, когда n неограниченно возрастает, первый множитель стремится к нулю, а второй неограниченно растет. Если в алгебре встречается такое произведение, то о нем говорят, что оно получилось в виде неопределенности, но чаще всего можно вычислить *его истинное значение* с помощью простых приемов, которые в данном случае дали бы бесконечно большое значение.

Однако мы покажем, что в силу смысла обоих множителей в рассматриваемом произведении применение здесь алгебраической теории «истинного значения» неправомерно.

Действительно, первый множитель — вероятность, стремящаяся к нулю при неограниченном возрастании n; эта вероятность становится нулем при бесконечном n, что означает *невозможность* допущения, будто Павел может выиграть все партии. Эта невозможность остается в силе, каково бы ни было число сыгранных серий; вероятность того, что одна из серий — неограниченной продолжительности, всегда равна нулю, сколько бы серий мы не брали. Можно даже доказать, что эта вероятность остается равной нулю и при допущении, что можно действительно сыграть бесконечно большое число последовательных партий. Но этот последний пункт для нашего вывода не необходим: каково бы ни было число N сыгранных партий, достоверно, что Павел никогда не выиграет, ибо всегда наступит момент, когда Петр выиграет партию и закончит победителем свою игру на квит. Следовательно, при вычислении $\mathscr{E}'$ нам нечего заниматься оценкой гипотетического выигрыша, на который умножается вероятность,— как только вероятность становится нулем, нулем становится и математическое ожидание $\mathscr{E}'$. Между тем $\mathscr{E}$ возрастает неограниченно, следовательно, неограниченно возрастает и разность $\mathscr{E} - \mathscr{E}'$.

Итак, математическое ожидание для Петра бесконечно, а это значит, что оно тем больше, чем больше число серий партий. На деле оно приблизительно равно n, если число серий равно 2^n, то есть оно по сравнению с числом серий растет очень медленно.

Все же надо считать, с математической точки зрения, что оно бесконечно, если вопрос рассматривается отвлеченно, как это и предполагается. Действительно, это математическое ожидание пропорционально логарифму времени, а здесь нас не отпугивает представление об игре, длящейся столько веков, что это превосходит все вообразимое.

Итак, оказывается, достаточно ввести бесконечность в ее потенциальном виде — и перестает быть верным положение, что игра безобидна, если она состоит из конечного числа партий, в каждой из которых игра безобидна. Это положение верно, если число партий фиксировано, то есть не может превзойти известного числа n; впрочем, это заранее установленное число может быть сколь угодно большим. Но дело обстоит иначе, если число партий бесконечно в математическом смысле этого слова, то есть если это — переменное число, значение которого для каждой серии вполне определено и, стало быть, конечно, но в новой серии оно может оказаться бóльшим заданного числа, сколь бы последнее не было велико. Вот это и называется потенциальной бесконечностью — в противоположность бесконечности осуществленной (актуальной), которую иной раз рассматривают математики и которая состоит в рассмотрении всех целых чисел сразу (или всех членов ряда со значками, представляющими все целые числа). Именно эта осуществленная бесконечность критикуется в знаменитых софизмах Зенона Элеата, когда греческий философ утверждает, что Ахиллес не может догнать черепаху или что летящая стрела неподвижна [22].

Иными словами, Павел может выиграть, при абстрактной постановке вопроса, каково бы ни было наибольшее число партий n, так как для этого достаточно допустить, что число серий превышает 2^n. Однако его выигрыш невозможен, если n не фиксировано, так как для этого потребовалась бы бесконечная последовательность удач, что не может осуществиться.

Пожалуй, можно составить еще более отчетливое понятие об этом, если представить себе неограниченную серию партий, состоящую из всех законченных серий, каждая из которых закончилась партией, выигранной Петром. Мы можем изобразить такую неограниченную серию с помощью бесконечного ряда цифр 0 и 1, где 0 отвечает партиям, выигранным Павлом, а 1 — партиям, выигранным Петром. Согласно закону больших чисел, при случайной выборке цифр из такого ряда отношение числа нулей к числу единиц стремится к единице, когда число выбранных цифр неограниченно возрастает, потому что шансы указать 0 и указать 1 равны. Итак, имеется бесконечно много нулей и бесконечно много единиц. Чтобы Павел выиграл, нужно, чтобы, начиная с определенного места, *все* цифры были нулями. И даже в этом случае *никогда* нельзя было бы утверждать, что Павел выиграл, так как для этого нужно было бы осуществить бесконечно много выборок [1]).

[1]) Так как на Земле жило лишь конечное число людей, то можно было бы охватить все подобные партии в орла и решку, сыгранные в прошедшие века, и добавить к ним те, что будут сыграны в течение будущих веков. Кто согласится с тем, что все рулетки всегда давали красное и никогда — черное?

Мы довольно подробно рассмотрели наш вопрос с разных сторон, потому что полученный результат действительно своеобразен и более парадоксален, чем петербургский парадокс. Ведь дело свелось к тому, что Петр, играя все время в безобидную игру, может обеспечить себе игрой на квит те же преимущества, что и при петербургской игре, не выплачивая взамен Павлу ни сантима.

Таким образом, выявляется, что предоставление Петру привилегии назначать ставку и прекращать игру по своему усмотрению оказываются чрезмерными и несправедливыми в условиях, когда на сцену выступает потенциальная бесконечность (то есть, когда число партий заранее не установлено или, что сводится к тому же, когда не зафиксирован наибольший размер ставки). Введение потенциальной бесконечности достаточно, чтобы сделать безобидную игру несправедливой.

Я должен сознаться, что полагал возможным (в заметке относительно пари Паскаля [23]) рассматривать предельное значение математического ожидания при обращении известной переменной в бесконечность. Так как в этом частном случае вычисление дало в качестве предельного значения нуль, результат оказался верным. Но я допустил ошибку, потому что все выглядело так, как если бы допускался и другой результат. В действительности же, как только что показано, обычные правила вычисления нельзя применять для подсчета предельного значения математического ожидания. Вопрос надо рассматривать по существу и, если установлено, что предполагаемое событие в действительности невозможно, надо считать математическое ожидание равным нулю, какова бы ни была бесконечность обещаний в случае выигрыша. Вот в чем причина того, что соображения в случае пари Паскаля не убедили ни одного неверующего.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

[1] к стр. 13. Автор нигде не вводит точного определения вероятности случайного события, поэтому можно рекомендовать читателю ознакомиться с этим понятием по широко распространенным книгам: С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, ГТТИ, 1934, 3-е изд.; Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Гостехиздат, 1954, 2-е изд.; А. Яглом и И. Яглом, Вероятность и информация, Физматгиз, 1960, 2-е изд.; Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин, Элементарное введение в теорию вероятностей, Гостехиздат, 1957, 4-е изд.

Попытку Э. Бореля применить точные количественные оценки для вероятностей тех или иных поступков отдельных лиц едва ли можно считать интересной для науки. Эти вероятности имеют отношение лишь к данному лицу и в большой степени зависят от его психологических и физиологических особенностей и даже от его состояния в данный момент. Выводы, которые при этом будут получены, не обязательны не только для других людей, но и для того же лица в другое время. Борель прав, заявляя, что эти вероятности «не существуют отвлеченно, а только по отношению к некоторому человеческому мозгу». Однако то, что было им сказано в этой книге до сих пор, еще не дает права отождествлять взгляды Бореля на вероятность произвольного случайного события с субъективно идеалистическим подходом к этому основному понятию.

Заключительные слова настоящего раздела следует понимать в том смысле, что подавляющее большинство ученых интересовались лишь вероятностями событий, для которых это понятие имеет объективный, не зависящий от познающего субъекта смысл.

[2] к стр. 15. Борель здесь выражается недостаточно определенно. Сказанному нужно придавать такой смысл: вероятностные заключения о течении случайных событий существенно зависят от тех условий, в которых события протекают. Для иллюстрации этого положения рассматривается пример с двумя колодами карт. Выводы из гипотезы, что в колоде 52 карты, могут оказаться иными для колоды, состоящей из 32 карт.

[3] к стр. 16. Здесь необходимо отметить два момента. Во-первых, слова «известны», «наше знание» в контексте не придают субъективного оттенка понятию вероятности. Во-вторых, в тех случаях, когда все обстоятельства течения явления известны, в принципе можно обойтись без обращения к вероятностным концепциям. Однако, это совсем не означает, что в этом случае аппарат теории вероятностей полностью

теряет свое значение. В тех случаях, когда явление складывается под влиянием большого числа приблизительно равноправных ингредиентов, могут встретиться случаи, при которых детерминистическое описание не приводит к цели, так как пользование свойственным ему аналитическим аппаратом связано с непреодолимыми техническими трудностями. В то же время теоретико-вероятностный подход дает вполне удовлетворительное описание явления и позволяет количественно правильно предсказывать его течение.

[4] к стр. 21. На русском языке прочесть о применениях понятия математического ожидания можно во многих книгах, например в тех, которые были упомянуты в [1]. Борель сформулировал здесь следующую важную теорему: если X и Y любым способом связанные между собой случайные величины, то математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых $M\,(X+Y)=MX+MY$. Здесь M означает символ математического ожидания стоящей за ним случайной величины.

[5] к стр. 22. Тут использована так называемая теорема умножения вероятностей, излагаемая во всех книгах по теории вероятностей. Формулировка теоремы такова:

Вероятность совместного появления событий A и B ($P\,(AB)$) равна произведению вероятности одного из них ($P\,(A)$ или $P\,(B)$) на вероятность другого при условии, что первое событие произошло (на $P\,(B/A)$ или $P\,(A/B)$). В виде формулы имеем

$$P\,(AB)=P\,(A)\,P\,(B/A)=P\,(B)\,P\,(A/B).$$

Если условная вероятность $P\,(B/A)$ совпадает с безусловной, то есть с $P\,(B)$ (или же $P\,(A/B)=P\,(A)$), то события A и B называются независимыми. Для независимых событий теорема умножения особенно проста, а именно,

$$P\,(AB)=P(A)\,P\,(B).$$

Этой последней формой теоремы и пользуется здесь Борель (для случая четырех независимых событий). Обобщение теоремы на случай любого числа событий очевидно.

Далее в книге используется другое основное положение теории вероятностей — теорема сложения.

Она формулируется так:

Если события A и B несовместны (то есть вероятность их совместного появления равна нулю), то вероятность того, что произойдет одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей. В виде формулы сказанное представится так:

$$P\,(A \text{ или } B)=P\,(A)+P\,(B).$$

[6] к стр. 27. Борель здесь формулирует так называемый усиленный закон больших чисел, точная формулировка которого заключается в формуле (символ $P\,\{\ \}$ обозначает вероятность того, что записано в фигурных скобках)

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} f_n=p\right\}=1.$$

Закон больших чисел в формулировке Бернулли слабее этого утверждения и состоит в следующем: если в каждом из n независимых испытаний случайное событие появляется с одной и той же вероятностью p, то при достаточно большом n с вероятностью как угодно близкой к 1 разность $|f_n - p|$ окажется меньше любого наперед заданного числа. В виде формулы это выразится так:

$$P\{|f_n - p| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Различие между двумя этими предложениями состоит в том, что обычный закон больших чисел (теорема Бернулли) утверждает лишь следующее: если n достаточно велико, то с как угодно большой вероятностью при этом значении n величины f_n и p будут близки. Усиленный же закон больших чисел утверждает, что разность между ними с вероятностью 1 останется малой и при всех последующих значениях n.

[7] к стр. 29 — см. [5].

[8] к стр. 31. Борель указывает здесь только примерный порядок убывания вероятности. Более точные оценки могут быть получены с помощью интегральной теоремы Лапласа, согласно которой

$$P\{|f_n - p| \geqslant c\sqrt{npq}\} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_c^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Имеет место приближенное равенство

$$\int\limits_c^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \sim \frac{1}{c}\, e^{-\frac{c^2}{2}}.$$

Поэтому

$$P\{|f_n - p| \geqslant 2c\sqrt{npq}\} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{2c}\, e^{-\frac{4c^2}{2}} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{8} c^3 \left(\frac{2}{c\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{c^2}{2}}\right)^4 \sim c^3\,[P\{|f_n - p| > c\sqrt{npq}\}]^4.$$

[9] к стр. 35. В этом и в двух ближайших параграфах автор рассматривает некоторые из методов, применяемых «институтами общественного мнения», существующими в ряде капиталистических стран. Среди таких институтов особой известностью пользуется институт Галлопа. Законность применения теоретико-вероятностных методов к изучаемым ими проблемам заслуживает специального изучения, поскольку необходимо убедиться в том, что принципы теории вероятностей хотя бы в общих чертах сохраняются и для этого круга идей. Однако эти параграфы сохранены в нашем издании не только ради полноты русского издания, но и потому, что вероятностные схемы, которые рассматривает в них Э. Борель, применимы в других задачах, где их использование научно обосновано. Одной из областей таких применений является статистический контроль качества продукции, изготовляемой в больших количествах и в неизменных условиях.

[10] к стр. 44. Эти работы изложены в деталях и с различных точек зрения в прекрасной книге Ж. Перрэна «Атомы» (русский перевод, ГИЗ, 1924). Наряду с Перрэном необходимо отметить многочисленных ученых разных национальностей, которые превратили молекулярную физику из умозрительной науки в экспериментально проверяемую.

[11] к стр. 51. Борель несколько упрощает изложение, поэтому имеет смысл напомнить обозначения и формулу, используемые в термодинамике. Энтропия S является мерой термодинамической вероятности w состояния системы и связана с ней соотношением

$$S = k \ln w.$$

Здесь k — так называемая постоянная Больцмана, а w — число различных микросостояний системы, реализующих данное макросостояние.

В этой формуле w — целое число и притом большое, поэтому логарифм его положителен и при переходе к более вероятному состоянию энтропия, согласно этому обычному определению, не убывает, а возрастает.

В теории информации используется понятие энтропии, близкое к приведенному.

[12] к стр. 51. Упоминаемое в тексте «расширение вселенной» – вывод из установленного факта так называемого «красного смещения». Является открытым вопрос о возможности других объяснений явления красного смещения.

[13] к стр. 55. Быть может, здесь лучше говорить не о десятичных вероятностях, а о вероятностях цифр в десятичных разложениях чисел. Впрочем, дальнейшее содержание параграфа не может привести к каким бы то ни было недоразумениям.

[14] к стр. 56. Формулы Пуассона дают приближенное значение вероятности k-кратного ($k=0, 1, 2, \ldots$) появления события при n независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом из испытаний мала и остается неизменной. Вероятность того, что событие появится k раз, равна

$$P(k) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda = pn$, p— вероятность события в каждом из n испытаний. В примере, рассмотренном Борелем, $n = 10\,000\,000\,000$, $p = \frac{1}{10\,000\,000\,000}$. Таким образом $\lambda = 1$ и

$$P(0) \approx e^{-1} \approx 0{,}368,$$
$$P(1) \approx 1 \cdot e^{-1} \approx 0{,}368,$$
$$P(2) \approx \frac{e^{-1}}{2!} \approx 0{,}184,$$
$$P(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} \approx 0{,}061.$$

[15] к стр. 57. О понятиях актуальной и потенциальной бесконечности см. статьи БСЭ (изд. 2-е): Бесконечность (в математике), т. 5. Множеств теория, т. 28.

[16] к стр. 57. Результаты, о которых рассказывается ниже, были получены в известной книге: E. Borel «Leçons sur la théorie des fonctions», Paris, 1914. Значительное внимание этим идеям уделено в монографии А. Г. Постникова «Арифметическое моделирование случайных процессов», Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 57, изд. АН СССР, 1960.

[17] к стр. 57. Это означает, что каждое ненормальное число можно поместить внутри системы отрезков, суммарная длина которых может быть сделана сколь угодно малой.

[18] к стр. 65. Диаметр галактики оценивается величиной порядка 100 000 световых лет (см., например, БСЭ). Однако это различие размеров не сказывается на порядке числовых оценок, даваемых Э. Борелем.

[19] к стр. 71. Имеется в виду один пример Э. Бореля (в его книге «Случай»), в котором речь шла о вероятности получения культурных сокровищ, накопленных в крупнейших библиотеках мира, путем печатания обезьянами на пишущих машинках текстов наугад.

[20] к стр. 84. Смысл сказанного требует пояснения. Борель имеет в виду, что при выполнении весьма общих условий производства наблюдений вероятность того, что ошибка измерения окажется в пределах от x до $x+dx$, равна

$$p(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{h^2x^2}{2}}\, dx,$$

где постоянная $h>0$ характеризует качество измерений. Эта постоянная носит название меры (коэффициента) точности.

[21] к стр. 85. С концепцией вероятности, предложенной Р. Мизесом, можно познакомиться по книге самого Мизеса «Вероятность и статистика» (ГИЗ, 1930, перевод и редакция А. Я. Хинчина). Коллектив по Мизесу удовлетворяет двум требованиям: 1) относительные частоты появления определенного события в последовательности независимых испытаний имеют определенные предельные значения; 2) эти предельные значения остаются неизменными, если из всей последовательности выбрать любую подпоследовательность (требование иррегулярности).

Развернутая критика взглядов Мизеса на вероятность содержится в статье А. Я. Хинчина «Частотная теория Мизеса и современные идеи теории вероятностей», Вопросы философии № 1 и 2, 1961.

[22] к стр. 103. См. [15].

[23] к стр. 104. Под именем «пари Паскаля» известно своеобразное рассуждение, которое, по мнению Блэза Паскаля, должно неоспоримо доказывать существование бога (верховного существа). Это рассуждение содержится в его произведении «Мысли» (3-е русское издание, М., 1905); подробное его изложение содержится в книге Э. Бутру «Паскаль» (русск. перевод Спб., 1901, стр. 185—186).

Появление пари Паскаля относится к 1664 г., когда он занимался решением ряда задач, возникших в азартных играх и послуживших позднее базой для развития теории вероятностей. Рассуждения Паскаля сводятся к следующему: бог существует или не существует. Разум тут решить ничего не может. Остается оценить благоприятные и неблагоприятные шансы и стремиться обеспечить себе положительное математическое ожидание выигрыша. Выигрыш от признания существования бога бесконечен (вечное блаженство), наша ставка — земные блага, как бы они ни были велики,— конечна. Таким образом, надо держать пари за существование бога, даже если за это имеется лишь один шанс из бесконечного числа.

Паскаль ошибочно считает, что произведение нуля на бесконечность превосходит любое конечное число. Остальная часть наивных рассуждений Паскаля не требует критических пояснений. Указанию на только что отмеченную математическую ошибку Паскаля посвящена статья Э. Бореля, помещенная в докладах Парижской Академии наук: «Sur les probabilités dénombrables et le pari de Pascal», Comptes Rendues, t. 224 (1947), p.p. 77—78.

Эмиль Борель

Вероятность и достоверность

М., 1969 г., 112 стр.

Редактор *И. Е. Морозова*
Техн. редактор *В. С. Никифорова*
Корректор *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 27/VIII 1968 г. Подписано к печати 17/XII 1968 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 3,5.
Условн. печ. л. 5,88. Уч.-изд. л. 5,04.
Тираж 100 000 экз. Цена 29 коп.
Заказ № 3119.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва Ж-54, Валовая, 28
Отпечатано с матриц во 2-ой типографии изд. «Наука». Заказ № 1849
Москва, Шубинский пер., 10.